

د. تومي صالح
أستاذ التعليم العالي
كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير
جامعة الجزائر

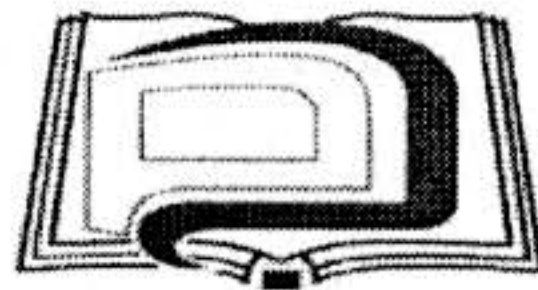
مدخل

لنظرية القياس الإقتصادي

دراسة نظرية مدعمة بأمثلة وتمارين

الجزء الثاني

الطبعة الثانية



ديوان المطبوعات الجامعية

© ديوان المطبوعات الجامعية: 2010-12
رقم النشر: 4.01.4365
رقم ر.د.م.ك (ISBN): 978.9961.0.0369.5
رقم الإيداع القانوني: 1998-1050

مدخل لنظرية القياس الإقتصادي

الجزء الأول:

الفصل الأول: التعريف والهدف من دراسة القياس الإقتصادي مع بعض المبادئ الإحصائية.

الفصل الثاني: تحليل نموذج الإنحدار الخطي البسيط.

الفصل الثالث: تحليل الإنحدار المتعدد.

الفصل الرابع: ميادين تطبيق الإنحدار المتعدد.

الفصل الخامس: نظرية العينات الكبيرة.

الجزء الثاني:

الفصل السادس: طريقة المربعات الصغرى المعممة، ومشاكل تطبيق الإنحدار المتعدد.

الفصل السابع: المتغيرات المؤخرة ونماذج توزيع التأخير.

الفصل الثامن: نماذج السلاسل الزمنية.

الفصل التاسع: مدخل لنظام معادلات خطية.

الملحق

الجزء الثاني

مقدمة المؤلف

أخي الطالب:

كما أشرنا من قبل، عند الانتهاء من إعداد الجزء الأول من هذا الكتاب، فإن الغرض من إصدار هذا المرجع هو إعطاء بعض التقنيات المستعملة في تقدير و بناء نماذج القياس الاقتصادي الخطية. حيث يركز هذا الجزء على بعض المشاكل التي تواجه الباحث أثناء تقدير و اختبار التصرفات الاقتصادية للأفراد، المؤسسات و متخذي القرارات الاقتصادية و السياسية على المستويين الجزئي و الكلي. كما يهتم بطرق نمذجة هذه التصرفات في شكل نموذج إحصائي و قياسي، يشرح و يوضح مختلف العلاقات الاقتصادية فيما بينها، أي ما يسمى بنموذج القياس الاقتصادي. ثم يوضح كيفية تطبيق تقنيات التقدير و النمذجة المناسبة لهذا النموذج، حتى نصل، في الأخير، إلى قبول أو رفض هذا البناء الإحصائي و الاقتصادي للنموذج. و من ثم، في حالة قبوله، يظهر دوره في المساعدة على التحليل، اتخاذ القرارات الاقتصادية المناسبة و التنبؤ بتلك الظواهر المدروسة.

لا أنسى تجديد شكري للأستاذين زكية بلعقبي و العيد بوزارة على مساعدتي في تنقيح النسخة الأولى و الثانية، على الترتيب لهذا العمل و للأستاذ علي رعاد على إثرائه لهذه النسخة من الناحية العلمية و اللغوية بعدما كلف رسميا من قبل المجلس العلمي لمعهد العلوم الاقتصادية لتقييم هذا العمل علميا و موافقته عليه. كما أجدد شكري، مرة أخرى، للأنسة حورية دابوز عما قدمته من جهد في كتابة هذه المادة و للأستاذ محمد عبد المؤمن (رئيس مركز الإعلام الآلي)، على مساعدتي في وضع التلمسات الأخيرة و وضع هذا العمل في قالبه النهائي. و في الأخير أشير إلى أن كل النقائص المتواجدة في هذا العمل يتحملها المؤلف.

صالح تومي

معهد العلوم الاقتصادية - جامعة الجزائر -

جانفي 1997.

الفهرس

الصفحة

الموضوع

الفصل السادس: طريقة المربعات الصغرى المعممة، و مشاكل الانحدار...1 المتعدد

1	المقدمة	
4	المربعات الصغرى المعممة	1-6
8	مقدر المربعات الصغرى المعممة	1-1-6
12	مقدر المربعات الصغرى المعممة و المقيد	2-1-6
13	التقدير المختلط	3-1-6
16	الخصائص التقاربية لمقدر المربعات الصغرى المعممة	4-1-6
18	عدم تجانس تباينات الأخطاء	2-6
22	الحلول المقترحة لعدم تجانس تباينات الأخطاء	1-2-6
29	حساب مقدر المربعات الصغرى المعممة الممكن	2-2-6
30	اختبار اكتشاف عدم تجانس تباينات الأخطاء	3-2-6
40	التنبؤ في ظل عدم تجانس تباينات الأخطاء	4-2-6
43	الارتباط الذاتي للأخطاء	3-6
53	اختبار اكتشاف الارتباط الذاتي	1-3-6
65	بعض الإضافات حول اختبار دربين-واتسون	2-3-6
69	الحلول المقترحة للارتباط الذاتي	3-3-6
72	طرق التقدير في ظل الارتباط الذاتي	4-3-6
82	التنبؤ في ظل الارتباط الذاتي للأخطاء	5-3-6
88	سلسلة تمارين حول الفصل السادس	4-6

الفصل السابع : المتغيرات المؤخرة و نماذج توزيع التأخير 95

95	مقدمة	
98	1-7 نماذج توزيع التأخير البسيطة	
100	2-7 متغيرات التأخير الخارجية	
102	1-2-7 تقدير التأخيرات بواسطة المربعات الصغرى	
103	2-2-7 تقدير كثير الحدود لنظام ALMON	
109	3-7 متغيرات التأخير الداخلية	
111	1-3-7 نظام التأخير الهندسي لـ KOYCK	
115	2-3-7 فرضية التعديل الجزئي	
119	3-3-7 نماذج التوقع	
124	4-3-7 نموذج التوقعات المطابقة	
126	5-3-7 نظام التأخير PASCAL	
128	6-3-7 الأنظمة الديناميكية	
135	4-7 طرق تقدير المعالم لنماذج محتوية على متغيرات داخلية	
	مؤخرة Y_{t-i}	
137	1-4-7 المتغير التابع المؤخر مع الأخطاء غير مرتبطة ذاتيا	
140	2-4-7 المتغير التابع المؤخر مع الأخطاء مرتبطة في شكل المتوسط	
	المتحرك	
143	3-4-7 المتغير التابع المؤخر مع الارتباط الذاتي للأخطاء	
152	5-7 نماذج التأخير العقلاني	
156	6-7 سلسلة تمارين حول الفصل السابع	

الفصل الثامن : نماذج السلاسل الزمنية

161	مقدمة	
163	نماذج المتوسط المتحرك	1-8
167	نماذج الإنحدار الذاتي	2-8
171	نماذج السيرورات المختلطة	3-8
173	الإستقرار و التجانس	4-8
178	دالة الارتباط الذاتي الجزئية	5-8
180	بناء نماذج السلاسل الزمنية الخطية	6-8
183	مرحلة التمييز	1-6-8
188	مرحلة التقدير	2-6-8
199	مرحلة التأكد من التشخيص	3-6-8
202	التنبؤ بواسطة نماذج السلاسل الزمنية	7-8
205	حساب التنبؤ	1-7-8
213	سلسلة تمارين حول الفصل الثامن	8-8

الفصل التاسع : مدخل لنظام معادلات خطية

217	مقدمة	
219	مقدر المربعات الصغرى المعممة	1-9
224	طريقة المعقولية العظمى	2-9
227	خصائص مقدرات المعقولية العظمى	3-9
229	القيود الخطية	4-9
231	إختبار القيود الخطية	5-9
233	التنبؤ في ظل النموذج الخطي المتعدد	6-9
234	نموذج الإنحدار الخطي المتعدد الديناميكي	7-9
238	سلسلة تمارين حول الفصل التاسع	8-9

240

الملحق

240

ملحق A: جبر المصفوفات

270

ملحق B: التوزيعات الاحتمالية

قائمة المراجع 282

الفصل السادس: طريقة المربعات الصغرى المعممة

Generalized Least Squares Method

مقدمة:

ذكرنا، في الفصل الأول، بأن المرحلة الثالثة لأي بحث في القياس الإقتصادي هي تقييم مقدرات المعالم. فبعد تقدير معالم النموذج بطريقة المربعات الصغرى العادية (أو بأية تقنية أخرى من تقنيات القياس الإقتصادي)، يجب أن نتأكد من مطابقة هذه المقدرات مع الواقع. ويرتكز التقييم، كما ذكرنا سابقا، على ثلاثة أسس (مقاييس). أولا، الأسس (أو المعايير) الإقتصادية المعروفة مسبقا، والتي تحدد بواسطة مبادئ النظرية الإقتصادية. حيث تتعلق بإشارة وحجم مقدرات المعالم. ثانيا، الأسس الإحصائية أو ما يسمى بمعايير النظرية الإحصائية (اختبارات الدرجة الأولى)، والمعروفة بواسطة النظرية الإحصائية. ثالثا، مقاييس نظرية القياس الإقتصادي (اختبارات الدرجة الثانية)، والمعرفة بواسطة نظرية القياس الإقتصادي. تعتمد المقاييس الإحصائية المستعملة في تقييم المقدرات على الأدوات والاختبارات الإحصائية المدروسة (والمشروحة) بالفصول السابقة وهي معامل الارتباط البسيط r ، معامل التحديد المتعدد R^2 ، الأخطاء المعيارية للمقدرات $S.E.(.)$ ، اختبارات التوزيع t, F, χ^2 وغيرها. وتكون هذه الاختبارات مقبولة فقط إذا كانت فرضيات نموذج الانحدار الخطي محققة. فمثلا، إذا كانت الأخطاء u_i غير مقيدة بالفرضيات الكلاسيكية، تصبح الاختبارات الإحصائية ليست كلها صالحة. ولكي نعطي أهمية لهذه الاختبارات يجب أولا، التأكد من أن الفرضيات الأساسية للمربعات الصغرى محققة في كل الحالات العامة والخاصة.

على العموم، إذا كانت فرضيات أية طريقة من طرق القياس الإقتصادي مخالفة في التطبيق، فإن المقدرات المحصل عليها من تلك الطريقة (التقنية) لا تحقق بعض أو كل الخصائص المفضلة للمقدرات. ومنه تصبح الاختبارات

الإحصائية غير معتمد عليها وسنتحدث في هذا الفصل عن بعض مقاييس نظرية القياس الإقتصادي للحكم على جودة المقدرات. حيث تبين لنا هذه المقاييس بعض الأدلة حول مخالفة بعض فرضيات نموذج الانحدار.

قمنا في الفصول السابقة بوضع فرضيات حول نموذج الانحدار الخطي العام والبسيط، ثم بينا كيف يمكن استعمال ذلك النموذج للتقدير، اختبار الفرضيات والتنبؤ. وكانت الفرضيات الأربعة والمتعلقة بالمتغير (الخطأ) العشوائي u_i ، هي انعدام الوسط للأخطاء، تجانس تباينات الأخطاء، عدم الارتباط الذاتي للأخطاء وفرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء. أما الفرضية الخامسة فتهتم بمصفوفة المتغيرات المستقلة X والتي تكون غير عشوائية ولا توجد أية علاقة خطية صحيحة فيما بين أعمدة عناصرها. بوجود هذه الفرضيات استطعنا أن نبين بأن مقدرات المربعات الصغرى العادية لمعالم الانحدار لها الخصائص المفضلة لدى المقدرات. إن الهدف الأساسي لهذا الفصل هو إيجاد كيف تتأثر خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية لما نسقط بعض الفرضيات الكلاسيكية والمذكورة أعلاه.

فبالنسبة للفرضية الخامسة، لاحظنا من قبل (الفصل الرابع) بأن مخالفتها تؤدي إلى ظهور مشاكل في التقدير. حيث لما يكون على الأقل عمود أو أكثر من أعمدة المصفوفة X مرتبطا خطيا (وتبقى X دائما غير عشوائية)، فإننا نواجه مشكل التعدد الخطي (أنظر الفصل الرابع، الفقرة السادسة). أما لما تكون بعض أعمدة المصفوفة X مرتبطة مع موجه الأخطاء U (X هنا تصبح عشوائية) فتطرقنا لها بالفصل الخامس (الفقرة الخامسة) تحت عنوان المتغيرات الأدواتية (أنظر كذلك الفصل الثاني بفقرة أخطاء القياس).

أما إذا تأملنا في بقية الفرضيات الأربعة الأولى (والمتعلقة بعنصر الخطأ العشوائي u_i)، على سبيل المثال فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء. فإذا أصبحت هذه الأخيرة غير محققة (غير موجودة) تبقى مقدرات المربعات الصغرى لمعالم الانحدار، دائما، محتوية على خاصية أفضل مقدار خطي غير متحيز (BLUE). وذلك لأن هذه الخاصية مستقلة عن الشكل الأصلي للمجتمع. ومنه نقول عند غياب هذه

الفرضية، فإن مقدرات المربعات الصغرى تبقى غير متحيزة وبأصغر تباين ممكن من كل التباينات الخاصة بالمقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى. لكننا لا نستطيع التكلم عن خاصية المقدّر الكفؤ (في العينات الصغيرة) مادامنا أصبحنا لا نعرف الشكل التوزيعي لهذه المقدرات. كما أن مقدرات المربعات الصغرى، في هذه الحالة، سوف تختلف عن مقدرات المعقولة العظمى. لأن دالة المعقولة المعتمدة على التوزيع الطبيعي تصبح غير قابلة التطبيق على هذه المقدرات. أما بالنسبة للخصائص التقاربية (أو خصائص العينات الكبيرة)، تكون مقدرات المربعات الصغرى متسقة وغير متحيزة تقاربيا حتى وإن أهملنا الشكل التوزيعي للأخطاء، إضافة إلى ذلك، إنه معروف بأن توزيع مقدرات المربعات الصغرى لمعالم الانحدار يقترب من التوزيع الطبيعي كلما اقترب حجم العينة n من ما لانهاية (مستعملين نظرية النهاية المركزية). وهذا يعني أن مقدرات المربعات الصغرى لها، تقاربيا، نفس توزيع مقدرات المعقولة العظمى المعتمدة على التوزيع الطبيعي. ولهذا يكون لهما نفس الوسط والتباين التقاربين.

نستنتج مما سبق، بأنه عندما نسقط فرضية التوزيع الطبيعي فإن مقدرات المربعات الصغرى تحتفظ بأغلبية خصائصها المفضلة، ولا يتغير شكل تباينات مقدراتها كما لاحظنا بالفصل الخامس. أما مجالات الثقة واختبارات المعنوية للمعالم فتعتمد على فرضية التوزيع الطبيعي في العينات الصغيرة. ومنه تكون هذه المقدرات غير موزعة طبيعيا (بالنسبة للعينات الصغيرة) مما يطرح لنا عدة مشاكل عند إجراء الاختبارات.

أما الفرضية الأولى والقاتلة بأن وسط الأخطاء معدوم، فهي تتعلق بخط انحدار المجتمع أي $E(y_i) = \alpha + \beta x_i$. ولكن إذا كان وسط الخطأ مختلفا عن الصفر ويساوي (مثلا μ_i) يصبح نموذج انحدار المجتمع على الشكل:

$$E(y_i) = \alpha + \beta x_i + \mu_i$$

$$E(u_i) = \mu_i$$

حيث أن:

إن المشكل هنا يعتمد على طبيعة الوسط μ_i حيث يجب أن نفرق بين الحالة التي يكون فيها μ_i له نفس القيمة بالنسبة لكل الملاحظات (أي $\mu_i = \mu$) ومنه يكون $E(U') = [\mu \ \mu \ \dots \ \mu]$ وبين الحالة التي تكون فيها قيمته متغيرة من ملاحظة لأخرى أي: $E(U') = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]$ ونأخذ الحالة التي يكون فيها خط انحدار المجتمع الحقيقي هو على الشكل:

$$E(y_i) = \alpha + \mu + \beta x_i = \alpha^* + \beta x_i$$

حيث أن: $\alpha^* = \alpha + \mu$

نلاحظ أن مقدار المربعات الصغرى للمعلمة β لا يتأثر، بينما قانون المربعات الصغرى لتقدير الحد الثابت يعطي مقدرا للقيمة α^* وليس α . ومنه يستحيل الحصول على المقدرتين $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\mu}$ على انفراد. أما عندما يكون μ_i غير ثابت، فإن الحد الثابت يصبح $(\alpha + \mu_i)$ ، وهذا يعني بأن هذه القيمة تتغير من ملاحظة لأخرى تبعا لقيمة μ_i . وبالتالي تصبح قيمة خط انحدار المجتمع $E(y_i)$ تتغير ليس فقط بتغير المتغير المستقل X_i ، ولكن بسبب مؤثرات أخرى مثل μ_i . وسنتحدث في الفقرات اللاحقة عن مخالفة الفرضيات الثانية (تجانس تباينات الأخطاء) والثالثة (عدم الارتباط في الأخطاء) بالتفصيل لنرى أثر ذلك على مقدرات المربعات الصغرى.

6-1 المربعات الصغرى المعممة (Generalised Least Squares (G.L.S))

في ظل الفرضيات الكلاسيكية لنموذج الانحدار الخطي، تكون الأخطاء غير مرتبطة فيما بينها ولها تباينات (متجانسة) بالنسبة لكل الملاحظات. وبالرغم من أننا أدخلنا لحد الآن طريقتي المعقولة العظمى والمتغيرات الأدواتية، بالإضافة لتقنية المربعات الصغرى العادية، في التقدير، فإننا لا نزال دائما نفترض بأن وحدات عناصر موجه الأخطاء تكون على الأقل غير مرتبطة فيما بينها ولها تباينات

متجانسة وموجبة. لكن هذه الحالة تعتبر مقيدة (حالة خاصة) ولا تصادفنا في أغلب الأحيان في دراستنا الميدانية لتحليلات القياس الإقتصادي. وسنتطرق في هذه الفقرة إلى الحالة التي تكون فيها الفرضيتان (الثانية والثالثة) السابقتان على الشكل:

$$\text{var}(U) = E(UU') = \Phi = \sigma_u^2 \Psi \dots (6.1)$$

حيث أن Φ ، Ψ هما مصفوفتان متناظرتان ومحددتان موجبتان، بينما σ_u^2 عدد سلمي موجب وغير معروف.

أما في ظل الفرضيات الكلاسيكية كانت الفرضيتان السابقتي الذكر على

الشكل:

$$E(UU') = \sigma_u^2 I_n = \begin{cases} E(u_i^2) = \sigma_u^2 \\ E(u_i u_j) = 0 \quad i \neq j \end{cases}$$

و مخالفة هاتين الفرضيتين بالمعادلة (6.1) يعني حالتين:

$$a) \quad E(UU') = \sigma_u^2 \Psi = \begin{cases} E(u_i^2) = \sigma_u^2: \quad i = 1, 2, \dots, n \\ E(u_i u_j) = 0: \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \dots (6.2)$$

وهذا يعني أن Ψ (أو Φ) هي مصفوفة قطرية، ولكن وحدات عناصر التباين الموجودة على قطرها الرئيسي غير متساوية. أما وحدات عناصر التباين المشترك الموجودة خارج قطرها فهي مساوية للصفر. نكون في هذه الحالة مع ظاهرة عدم تجانس تباينات الأخطاء (مخالفة الفرضية الثانية). وتظهر هذه الحالة، عادة، في دراسات وتحليل البيانات المقطعية.

$$b) \quad E(UU') = \sigma_u^2 \Psi = \begin{cases} E(u_i^2) = \sigma_u^2: \quad i = 1, 2, \dots, n \\ E(u_i u_j) \neq 0: \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \dots (6.3)$$

حيث تكون المصفوفة Ψ (أو Φ) غير قطرية ووحدات عناصر قطرها موجبة ومتساوية. بينما العناصر الموجودة خارج قطرها تكون غير متساوية وتختلف عن الصفر. لكنها تكون مصفوفة متناظرة وبالتالي نكون في حالة نظام الارتباط الذاتي للأخطاء. وسنأخذ، بهذا الفصل نظام المرتبة الأولى من الارتباط الذاتي للأخطاء كمثال مع بعض التوسيعات في دراستنا بالفقرات القادمة.

نعود الآن للحالة العادية أين يكون مقدر المربعات الصغرى العادية، $\hat{\beta}$ ، في النموذج الخطي العام هو: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \beta + AU$. مع العلم أن $A = (X'X)^{-1}X'$ هي مصفوفة قيم مثبتة في مختلف العينات. إن خاصية عدم التحيز لا تتأثر $E(\hat{\beta}) = \beta$ ، بينما في ظل فرضية المعادلة (1.6) يكون التباين على الشكل:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}) &= E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = AE(UU')A' \\ &= A\Phi A' = \sigma_u^2 A\Psi A' \\ &= \sigma_u^2 (X'X)^{-1}X'\Psi X(X'X)^{-1} \dots (6.4) \end{aligned}$$

ومنه فإن نتيجة التباين المتعود عليها من قبل $[\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}]$ ، لم تعد تقيس تباينات المعاينة لمقدرات المربعات الصغرى العادية (OLS)، وأي تطبيق لهذه النتيجة يكون خاطئا. حيث نلاحظ أن العبارة الموجودة بالمعادلة (4.6) تفوق النتيجة المعطاة من قبل بمصفوفة موجبة شبه محددة أي:

$$\sigma_u^2 [(X'X)^{-1}X'\Psi X(X'X)^{-1} - (X'X)^{-1}] \geq 0 \dots (6.5)$$

ففي هذه الحالة، بالرغم من عدم تأثر خاصية عدم التحيز، فإن خاصية الكفاءة أصبحت مفقودة. وبالتالي فقدنا كلا من خاصيتي أصغر تباين وأفضل مقدر خطي غير متحيز.

ولكن بالرجوع إلى خاصية الاتساق، المذكورة بالفصل الخامس، نلاحظ أنه إذا كتبنا العبارة (4.6) على الشكل:

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2}{n} \cdot (n^{-1}X'X)^{-1} (n^{-1}X'\Psi X) (n^{-1}X'X)^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-1}X'X) = Q_1$$

ونفرض أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-1}X'\Psi X) = Q_2$$

بحيث أن كلا من Q_1 و Q_2 موجودتان وغير شاذتين ينتج أن:

$$\text{plim}[\text{var}(\hat{\beta})] =$$

$$\text{plim}(n^{-1}\sigma_u^2) \cdot \text{plim}(n^{-1}X'X)^{-1} \cdot \text{plim}(n^{-1}X'\Psi X) \cdot \text{plim}(n^{-1}X'X)^{-1} \\ = 0 \cdot Q_1^{-1} \cdot Q_2 \cdot Q_1^{-1} = 0$$

ومنه فإن مقدار المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$ يبقى مقدرا متسقاً لـ β .
أما بالنسبة للاختبارات الإحصائية، فنلاحظ بأن موجهي مقدرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}$ والبواقي (بواقي المربعات الصغرى \hat{U}) يكونا غير مستقلين عن بعضهما البعض وغير متعامدين أي:

$$\hat{\beta} = \beta + AU$$

$$\hat{U} = MU$$

حيث أن: M مصفوفة خاملة وعلى الشكل:

$$M = I - X(X'X)^{-1}X'$$

ومنه نجد أن:

$$\text{cov}(\hat{\beta}, \hat{U}) = E[(\hat{\beta} - \beta)\hat{U}'] \\ = AE(UU')M \\ = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X'\Psi M \neq 0$$

ومنه نلاحظ أنه لا يمكن الاعتماد على مقدرات المربعات الصغرى العادية في هذه الحالة عند إجراء الاختبارات الإحصائية المناسبة، وتكون أغلب النتائج الإحصائية غير صحيحة في هذه الحالة المناسبة للمعادلة (1.6)

1-1-6 مقدر المربعات الصغرى المعممة:

لإدخال قانون المربعات الصغرى المعممة نستعمل نظرية AITKEN. حيث أن Ψ ، بالمعادلة (1.6) هي مصفوفة محددة موجبة. ومنه تعتمد هذه النظرية على فكرة إيجاد مصفوفة غير شاذة، ولتكن P ذات الأبعاد $n \times n$ ، شريطة أن تحقق:

$$P'P = \Psi^{-1} \dots (6.6)$$

$$\Psi = (P'P)^{-1} = P^{-1}P'^{-1} \quad \text{ومنه يكون:}$$

$$P\Psi P' = I_n \quad \text{لنجد أن:}$$

ومنه نقول للتخلص من ظاهرة عدم كفاءة وضلالية قانون المربعات الصغرى العادية لهذه الحالة، نضرب النموذج الأصلي (النموذج الخطي العام) من اليسار بالمصفوفة غير الشاذة P ، ليكون النموذج المحول على الشكل:

$$PY = PX\beta + PU \dots (6.7)$$

$$E(PU) = 0$$

حيث تصبح:

$$E(PUU'P') = \sigma_u^2 I_n$$

ونعيد كتابة النموذج (7.6) على الشكل:

$$Y_* = X_*\beta + U_* \dots (6.8)$$

حيث أن $Y_* = PY$ هي ملاحظات المتغيرات التابعة المحولة، $X_* = PX$ هي ملاحظات مصفوفة المتغيرات المستقلة المحولة، $U_* = PU$ هي ملاحظات موجه الأخطاء العشوائية المحولة. وبتطبيق قانون المربعات الصغرى العادية على المتغيرات المحولة بالنموذج (7.6) أو (8.6) نحصل على مقدرات لها الخصائص المثلى للمربعات الصغرى. وتطبق عليها طرق الاستنباط الإحصائي المذكورة سابقا. وبتطبيق قانون المربعات الصغرى العادية (بواسطة تصغير مجموع مربعات البواقي المحولة) على النموذج المحول في المعادلة (8.6) نجد:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_G &= (X_*'X_*)^{-1}X_*'Y_* = (X'P'PX)^{-1}X'P'PY \\ &= (X'\Phi^{-1}X)^{-1}X'\Phi^{-1}Y = (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}Y \dots (6.9) \end{aligned}$$

ويسمى مقدر المعادلة (9.6) أعلاه، $\hat{\beta}_G$ ، بمقدر المربعات الصغرى المعممة أو مقدر AITKEN. ومن خصائص هذا المقدر أنه:
(a) مقدر غير متحيز إذ أن:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_G &= \beta + (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}U \\ &= \beta + HU \dots (6.10)\end{aligned}$$

$$H = (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1} \quad \text{حيث أن:}$$

وإذا أدخلنا التوقع الرياضي نجد:

$$E(\hat{\beta}_G) = \beta \dots (6.11)$$

(b) مقدر كفو بالمقارنة مع مقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$. أي:

$$\begin{aligned}\text{var}(\hat{\beta}_G) &= E[(\hat{\beta}_G - \beta)(\hat{\beta}_G - \beta)'] \\ &= \sigma_u^2 H \Psi H' = \sigma_u^2 (X'\Psi^{-1}X)^{-1} \dots (6.12)\end{aligned}$$

ويكون هذا التباين أقل من التباين المذكور بالمعادلة (4.6) والخاص بمقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$. بمصفوفة موجبة شبه محددة أي:

$$\begin{aligned}\text{var}(\hat{\beta}) - \text{var}(\hat{\beta}_G) &= \\ &= \sigma_u^2 [(X'X)^{-1}X'\Psi^{-1}X(X'X)^{-1} - (X'\Psi^{-1}X)^{-1}] \geq 0 \dots (6.13)\end{aligned}$$

ويمكن كتابة المعادلتين (9.6)، (12.6)، على الترتيب، على الشكل:

$$\hat{\beta}_G = (X'\Phi^{-1}X)^{-1}X'\Phi^{-1}Y \dots (6.14)$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_G) = (X'\Phi^{-1}X)^{-1} \dots (6.15)$$

(c) مقدر له خاصية أفضل مقدر خطي غير متحيز.

فإذا عرفنا، مثلا، مقدرًا آخرًا خطيًا وغير متحيز على الشكل:

$$b_G = [H + C]Y \dots (6.16)$$

و C هي مصفوفة ثوابت

ليكون مقدر المربعات الصغرى المعممة بالمعادلة (9.6) هو:

$$\hat{\beta}_G = HY \dots (6.17)$$

لكي يكون المقدّر b_G غير متحيز يمكن كتابته على الشكل:

$$\begin{aligned} b_G &= (H + C)(X\beta + U) \\ &= HX\beta + CX\beta + (H + C)U \\ &= \beta + CX\beta + (H + C)U \end{aligned}$$

$$HX\beta = \beta : \quad \text{لأن}$$

ومنه نقول:

$$\begin{aligned} E(b_G - \beta) &= CX\beta + (H + C)E(U) \\ &= CX\beta = 0 \end{aligned}$$

إذا وفقط إذا كانت $CX = 0$. لينتج أن:

$$b_G - \beta = (H + C)U$$

أما تبين المقدّر b_G يكون في هذه الحالة:

$$\begin{aligned} \text{var}(b_G) &= E[(H + C)UU'(H + C)'] \\ &= \sigma_u^2(X'\Psi^{-1}X)^{-1} + \sigma_u^2 C\Psi C' \\ &= \text{var}(\hat{\beta}_G) + \sigma_u^2 C\Psi C' \end{aligned}$$

$$H\Psi C' = C\Psi H' = 0 \quad \text{لأن:}$$

$$\text{var}(b_G) - \text{var}(\hat{\beta}_G) = \sigma_u^2 C\Psi C' \geq 0 \quad \text{ومنه نستنتج أن:}$$

والتي تكون على الأقل أكبر أو تساوي الصفر، لأن المصفوفة Ψ محددة موجبة. ومنه تكون الصيغة التربيعية $C\Psi C'$ على الأقل مصفوفة موجبة شبه محددة. ثم نقول يكون مقدار المربعات الصغرى المعممة $\hat{\beta}_G$ ، مقدرا كفوًا وله خاصية أفضل مقدار خطي غير متحيز BLUE بالمقارنة مع المقدّر b_G . ونعرف الآن مقدار بواقي المربعات الصغرى المعممة على الشكل:

$$\hat{U}_G = Y - X\hat{\beta}_G \dots (6.18)$$

ليكون مجموع مربعات البواقي للمربعات الصغرى المعممة كما يلي:

$$\begin{aligned} \text{GRSS} &= \hat{U}_G' \Psi^{-1} \hat{U}_G = (PY - PX\hat{\beta}_G)'(PY - PX\hat{\beta}_G) \\ &= (Y - X\hat{\beta}_G)' \Psi^{-1} (Y - X\hat{\beta}_G) \end{aligned}$$

$$= Y' \Psi^{-1} Y - \hat{\beta}_G' X' \Psi^{-1} Y \dots (6.19)$$

ثم إن المقدّر غير المتحيّز لتباين الخطأ σ_u^2 يمكن أن يكون على الشكل:

$$\hat{\sigma}_{uG}^2 = \frac{\hat{U}_G' \Psi^{-1} \hat{U}_G}{n-k} = \frac{1}{n-k} [Y' \Psi^{-1} Y - \hat{\beta}_G' X' \Psi^{-1} Y] \dots (6.20)$$

وبوجود التوزيع الطبيعي للأخطاء، فإن مقدّر المربعات الصغرى المعممة،

$\hat{\beta}_G$ ، يمكن أن يكون هو نفسه مقدّر المعقولة العظمى، حيث إذا كانت:

$$U \sim N(0, \sigma_u^2 \Psi) \dots (6.21)$$

فإن اللوغاريتم الطبيعي لدالة المعقولة المناسبة لدالة الكثافة الاحتمالية

المجمعة هي: $\text{Log } L = \log[\text{Pr}(Y / X)]$

$$= \log \left[-(2\pi\sigma_u^2)^{-n/2} |\Psi|^{-1/2} \exp \left[\frac{-1}{2\sigma_u^2} (Y - X\beta)' \Psi^{-1} (Y - X\beta) \right] \right]$$

$$= \frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \sigma_u^2 - \frac{1}{2} \log |\Psi| - \frac{1}{2\sigma_u^2} (Y - X\beta)' \Psi^{-1} (Y - X\beta)$$

*.....(6.22)

حيث أن $|\Psi|$ هو محدد المصفوفة Ψ . وبكتابة العبارة:

$$S(\beta) = (Y - X\beta)' \Psi^{-1} (Y - X\beta)$$

$$= Y' \Psi^{-1} Y - 2\beta' X' \Psi^{-1} Y + \beta' X' \Psi^{-1} X \beta$$

فإن تعظيم الدالة $\log L$ بالنسبة لموجه المعالم β يستلزم تصغير

مجموع المربعات المرجحة $S(\beta)$ بالنسبة لـ β ومساواتها للصفر لنجد:

$$\tilde{\beta}_G = \hat{\beta}_G = (X' \Psi^{-1} X)^{-1} X' \Psi^{-1} Y$$

حيث أن $\tilde{\beta}_G$ هو مقدّر المعقولة العظمى في هذه الحالة وهو نفسه الموجود

بالمعادلة (9.6)، ومنه نقول بوجود فرضية التوزيع الطبيعي تكون كل طرق

الاستنباط الإحصائي، والمذكورة بالفصول السابقة، صالحة للتطبيق على هذا

المقدّر.

*-رقم معادلة 1. لسطر السابق

2-1-6 مقدر المربعات الصغرى المعممة والمقيد: Restricted (GLS)

في ظل القيود الخطية من الشكل $R\beta = r$ ، مع R ، و r هما $m \times k$ و $m \times 1$ مصفوفة وموجه قيود على الترتيب، يكون مقدر المربعات الصغرى المعممة والمقيد هو ذلك المقدر الناتج من تصغير العبارة اللاقرانجية التالية:

$$S(\beta, \lambda) = (PY - PX\beta)'(PY - PX\beta) - \lambda'(R\beta - r)$$

بإشتقاق العبارة أعلاه، بالنسبة لـ β و λ ، ومساواتها بالصفر مع بعض الترتيبات نجد مقدر المربعات الصغرى المعممة والمقيد على الشكل:

$$\hat{\beta}_{GR} = \hat{\beta}_G - (X'\Psi^{-1}X)^{-1}R'[R(X'\Psi^{-1}X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}_G - r) \dots (6.23)$$

$$H_0: R\beta = r$$

$$H_A: R\beta \neq r$$

ويكون إختبار صحة القيود الخطية على الشكل:

ومنه نجد:

$$H_0: (R\hat{\beta}_G - r)'[R(X'\Psi^{-1}X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}_G - r) / \sigma_u^2 \sim \chi_m^2$$

$$H_A: \frac{\hat{U}_G' \Psi^{-1} \hat{U}_G}{\sigma_u^2} = \frac{(n-k)\hat{\sigma}_{uG}^2}{\sigma_u^2} \sim \chi_{n-k}^2$$

وعندما يكون χ_m^2 مستقلا عن χ_{n-k}^2 نحصل على التوزيع (1):

$$\frac{(R\hat{\beta}_G - r)'[R(X'\Psi^{-1}X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}_G - r) / m}{\hat{\sigma}_{uG}^2} \sim F_{m, n-k} \dots (6.24)$$

تكون عبارة التوزيع، بالمعادلة (24.6) أعلاه، صحيحة فقط لما تكون عناصر المصفوفة Ψ معروفة. ولكن في أغلب الحالات لاتعرف عناصر هذه الأخيرة، ومنه لإجراء إختبار المعادلة (24.6) يجب أن نطبق طريقة من طرق التقدير للمصفوفة غير المعروفة Ψ والتي سيأتي ذكرها فيما بعد.

1- يمكن للقارئ تطبيق مضمون النظرية الموجودة بالفصل الرابع والخاصة باستقلالية صيغتين تربيعين عن بعضهما البعض.

3-1-6 التقدير المختلط Mixed Estimation

باستعمال فكرة التقدير المختلط للكاتبين Theil-Goldberger يمكن توسيع الطريقة السابقة من أجل الحصول على مقدر المربعات الصغرى المعممة والمقيد في ظل الفرضية الإضافية للقيود الخطية والتي تكون على الشكل:

$$r = R\beta + V \dots (6.25)$$

مع الفرضيات:

$$E(V) = 0, \quad E(VV') = \Sigma, \quad E(UV') = 0$$

حيث أن Σ هي مصفوفة غير شاذة.

نوفق معادلة القيود الخطية (25.6) مع النموذج الخطي العام $Y = X\beta + U$ ، مع الفرضية $E(UU') = \sigma_u^2 \Psi$ ، ونفترض أن المعلومات المسبقة ومعلومات العينة يكونان مستقلين أي:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \Psi & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} \right] \dots (6.26)$$

ثم نحصل على المقدر المقيد وغير المتحيز، والذي هو خطي في Y و r ، عن طريق تطبيق نظرية AITKEN للمربعات الصغرى المعممة - ومادامت مصفوفة

التباين المشترك لموجه الأخطاء $(U \ V)'$ هي مصفوفة كتلة - قطرية

Block Diagonal Matrix، فإن معكوسها هو كذلك مصفوفة كتلة - قطرية أي:

$$\text{var} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\sigma_u^2)^{-1} \Psi^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma^{-1} \end{bmatrix} = \mathbf{1}^{-1} \dots (6.27)$$

ويكون النموذج المختلط على الشكل:

$$\begin{pmatrix} Y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \dots (6.28)$$

ثم نعيد كتابة المعادلة (28.6) على النحو:

$$Y^* = X^* \beta + U^* \dots (6.29)$$

حيث أن:

$$Y^* = \begin{pmatrix} Y \\ r \end{pmatrix}, \quad X^* = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix}, \quad U^* = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

ومنه يكون مقدر المربعات الصغرى المعممة والمقيد هو ذلك المقدر الذي يأخذ بعين الاعتبار النموذج (29.6) والفرضية:

$$E(U^* U'^*) = I$$

حيث نبحث عن مصفوفة غير شاذة، ولتكن L ، والتي تحقق الشرط:

$$L' L = I^{-1} \dots (6.30)$$

بحيث أن: $L' L = I$ ويضرب النموذج (29.6) بالمصفوفة L وتطبيق قانون المربعات الصغرى على هذا النموذج المحول نحصل على:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{GR}^* &= \left(X'^* L' L X^* \right)^{-1} X'^* L' L Y^* \\ &= \left(X'^* I^{-1} X^* \right)^{-1} X'^* I^{-1} Y^* \dots (6.31) \end{aligned}$$

وبالتعويض عن كل من X ، Y و I^{-1} بما يساويها في المعادلات (29.6) و (30.6) على الترتيب نجد:

$$\hat{\beta}_{GR}^* = \left[\frac{1}{\sigma_u^2} X' \Psi^{-1} X + R' \Sigma^{-1} R \right]^{-1} \left(\frac{1}{\sigma_u^2} X' \Psi^{-1} Y + R' \Sigma^{-1} r \right) \dots (6.32)$$

ويسمى هذا الأخير، بالمعادلة (32.6)، بمقدر Theil-Goldberger للمربعات الصغرى المعممة المقيد. حيث يكون هذا المقدر أفضل مقدر خطي غير متحيز⁽²⁾ وله تباين هو:

²- يمكن للقارئ التأكد من ذلك بفرض أي مقدر خطي في Y و r وغير متحيز آخر. ثم مقارنة تباينه مع ذلك الموجود بالمعادلة (33.6).

$$\text{var}(\hat{\beta}_{GR}^*) = \left[\frac{1}{\sigma_u^2} X' \Psi^{-1} X + R' \Sigma^{-1} R \right]^{-1} \dots (6.33)$$

ولإجراء اختبارات المعنوية الملائمة للعينة والمعلومة المسبقة

$R\beta + V = r$ ، نقول بأن هذه المعلومة ذات الموجه العشوائي $V = r - R\beta$ ذو الوسط صفر، ومصفوفة التباين المشترك Σ ، توفر للعينة مقدرا لـ β . ولنعتبر:

$$r - R\hat{\beta}_G = (R\beta + V) - R\hat{\beta}_G = -R(\hat{\beta}_G - \beta) + V \dots (6.34)$$

حيث أن $\hat{\beta}_G$ معرف بالمعادلة (9.6).

وتحت الفرضية الموجودة بالمعادلتين (26.6) و (29.6) يكون توزيع

الموجه $r - R\hat{\beta}_G$ بالمعادلة (34.6) على الشكل:

$$r - R\hat{\beta}_G \sim N[0, \sigma_u^2 R(X' \Psi^{-1} X)^{-1} R' + \Sigma] \dots (6.35)$$

وبالتالي يمكن تشكيل العبارة:

$$(r - R\hat{\beta}_G)' [\sigma_u^2 R(X' \Psi^{-1} X)^{-1} R' + \Sigma]^{-1} (r - R\hat{\beta}_G) \sim \chi_m^2 \dots (6.36)$$

وذلك في ظل فرضية المعادلة (29.6). أما الفرضية البديلة H_A ، فتدل على عدم

التمكن من دمج النموذجين $Y = X\beta + U$ وكذلك $r = R\beta + V$. ومنه إذا تمكنا

من تقدير النموذجين المختلفين على إنفراد لنحصل من النموذج $Y = X\beta + U$

على $\hat{\sigma}_{uG}^2$. ومن النموذج $r = R\beta + V$ على $\hat{\sigma}_{vG}^2$ حيث أن (3):

$$\hat{\sigma}_{vG}^2 = \frac{\hat{V}' \Sigma^{-1} \hat{V}}{m - k}$$

ثم نكون الاختبار الإحصائي المناسب لذلك على الشكل: (4)

$$\frac{(r - R\hat{\beta}_G)' [\sigma_u^2 R(X' \Psi^{-1} X)^{-1} R' + \Sigma]^{-1} (r - R\hat{\beta}_G) / m}{\hat{\sigma}_{vG}^2} \sim F_{m, n-k} \dots (6.37)$$

3- يشترط المعرفة المسبقة لعناصر المصفوفة R والموجه r .

4- يشترط معرفة عناصر المصفوفتين Ψ و Σ لكي تجري الاختبار أعلاه.

4-1-6 الخصائص التقريبية لمقدر المربعات الصغرى المعممة:

بتطبيق قانون المربعات الصغرى العادية على مصفوفة الملاحظات المستقلة المحولة PX، وموجه الملاحظات التابعة المحولة PY حصلنا على موجه مقدرات المربعات الصغرى المعممة بالمعادلة (9.6) ومقدر تباينات الأخطاء المحولة بالمعادلة (20.6). ثم لنفرض الصيغة التربيعية $(n^{-1}X'\Psi^{-1}X)$ تتقارب إلى مصفوفة محددة موجبة وغير شاذة على الشكل:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n^{-1}X'\Psi^{-1}X] = Q \dots (6.38)$$

وإذا كانت عناصر الأخطاء المحولة PU مستقلة ومتماثلة التوزيع، فإن $\hat{\sigma}_{UG}^2$ هو مقدر متنسق لـ σ_U^2 وكذلك $\sqrt{n}(\hat{\beta}_G - \beta)$ له نهاية توزيع بموجه وسطه هو الصفر ومصفوفة تباينه المشترك هي $\sigma_U^2 Q^{-1}$ أي:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_G - \beta) \xrightarrow{D} \eta \sim N(0, \sigma_U^2 Q^{-1}) \dots (6.39)$$

لكن في أغلب الأحيان تكون عناصر المصفوفة Ψ غير معروفة. وبالتالي نعوضها بمقدرها $\hat{\Psi}$ (كما سيتضح في الفقرة القادمة). ثم نكتب $\hat{\Psi}_n$ ، حيث تشير n هنا إلى حجم العينة التي حصلنا منها على المقدر. ومنه نكتب المقدر التقاربي للمربعات الصغرى المعممة على الشكل:

$$(\hat{\beta}_G)_n = (X' \hat{\Psi}_n^{-1} X)^{-1} X' \hat{\Psi}_n^{-1} Y \dots (6.40)$$

$$(\hat{\sigma}_{UG}^2)_n = \frac{1}{n-k} [Y' \hat{\Psi}_n^{-1} Y - (\hat{\beta}_G)_n' X' \hat{\Psi}_n^{-1} Y] \dots (6.41)$$

ثم نلاحظ العلاقة الموجودة بين المعادلتين (40.6)، (41.6) والمعادلتين (9.6)، (20.6) على الترتيب. لنقول أنه بالإضافة إلى الفرضية (38.6)، نفترض أن:

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} [n^{-1}X'(\hat{\Psi}_n^{-1} - \Psi^{-1})X] = 0 \dots (6.42)$$

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} [n^{-1/2}X'(\hat{\Psi}_n^{-1} - \Psi^{-1})U] = 0 \dots (6.43)$$

فوجود المعادلات (38.6)، (42.6) يمكن القول بأن مقدر المربعات الصغرى المعممة بالمعادلة (40.6) يكون متكافئا مع المقدر $\hat{\beta}_G$ بالمعادلة (9.6) في الإتجاه القائل بأنه كلما إقتربت n من مالانهاية فإن:

$$\sqrt{n}[(\hat{\beta}_G)_n - \beta] \xrightarrow{P} 0 \dots (6.44)$$

حيث أن كلا المقدرين $\hat{\beta}_G$ و $(\hat{\beta}_G)_n$ موزعين طبيعيا بموجه وسطه هو β وبمصفوفة تباين مشترك هي $\sigma_U^2 n^{-1} Q^{-1}$. وإذا أضفنا الفرضية:

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} [n^{-1} U' (\hat{\Psi}_n^{-1} - \Psi^{-1}) U] = 0 \dots (6.45)$$

نقول عن $(\hat{\sigma}_{UG}^2)_n$ بالمعادلة (41.6)، و $\hat{\sigma}_{UG}^2$ بالمعادلة (20.6)، بأنهما مقدرين متسقين لـ σ_U^2 .

فإذا اعتبرنا خطأ المعاينة لـ $(\hat{\beta}_G)_n$ مضروبا في \sqrt{n} لنجد:

$$\sqrt{n}[(\hat{\beta}_G)_n - \beta] = (n^{-1} X' \hat{\Psi}_n^{-1} X)^{-1} (n^{-1/2} X' \hat{\Psi}_n^{-1} U) \dots (6.46)$$

وكذلك:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_G - \beta) = (n^{-1} X' \Psi^{-1} X)^{-1} (n^{-1/2} X' \Psi^{-1} U) \dots (6.47)$$

فإن العبارة $(n^{-1} X' \Psi^{-1} X)^{-1}$ تتقارب إلى Q^{-1} . ومنه، بإستعمال المعادلة (44.6) يمكن القول بأن:

$$\sqrt{n}[(\hat{\beta}_G)_n - \hat{\beta}_G] \xrightarrow{P} 0$$

$$\sqrt{n}[(\hat{\sigma}_{UG}^2)_n - \hat{\sigma}_{UG}^2] \rightarrow 0$$

ومنه نستخلص بأن $\hat{\beta}_G$ و $(\hat{\beta}_G)_n$ لهما نفس خاصية التوزيع التقاربي ⁽⁵⁾ وتكون على الشكل:

$$\sqrt{n}[(\hat{\beta}_G)_n - \hat{\beta}_G] \xrightarrow{D} \eta \sim N[0, \sigma_U^2 Q^{-1}] \dots (6.48)$$

⁵ - أنظر

2-6 عدم تجانس تباينات الأخطاء Heteroskedasticity

هناك عدة أسباب في القياس الإقتصادي تجعل فرضية ثبات تباين الخطأ غير معقولة. فمثلا، إذا اخترنا بيانات مقطعية لعدة مؤسسات في صناعة ما، يمكن أن تكون الأخطاء المتعلقة بالمؤسسات الضخمة لها تباينات أكبر من تباينات الأخطاء المتعلقة بالمؤسسات الصغيرة. حيث أن مبيعات المؤسسات الضخمة يمكن أن تكون متقلبة (متغيرة) أكثر من مبيعات المؤسسات الصغيرة. كما أن إنفاق العوائل ذات المداخيل العالية يكون متقلبا ومتغيرا، مثلا، بين السلع الكمالية والضرورية. بينما إنفاق العوائل ذات المداخيل المنخفضة يتجه في أغلب الأحيان إلى السلع الضرورية للحياة فقط.

وبالرجوع إلى فرضية المعادلة (1.6)، كنا قد ذكرنا حالتين لهذه الفرضية. فإما أن تكون تعني المعادلة (2.6) وهذا معناه عدم تجانس تباينات الأخطاء. أو المعادلة (3.6) وهذا معناه الارتباط الذاتي للأخطاء. ومن ثم لنفرض النموذج البسيط:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t : t = 1, 2, \dots, n \dots (6.49)$$

حيث أن u_t لها تباينات متماثلة مع تباينات مشتركة مساوية للصفر، ولنفرض أنه يمكننا الحصول على بيانات مبوبة (في ظل البيانات المقطعية) لمعدلات m فئة. حيث تكون n_i تمثل عدد الملاحظات في الفئة i . ومنه يكون النموذج المناسب لهذه الحالة هو:

$$\bar{y}_i = \alpha + \beta \bar{x}_i + \bar{u}_i : i = 1, 2, \dots, m \dots (6.50)$$

وبناء على التعريف أعلاه يصبح:

$$\text{var}(\bar{u}_i) = \frac{\sigma_u^2}{n_i} : i = 1, 2, \dots, m$$

ومنه تكون المعادلة (2.6) على الشكل:

$$E(UU') = \sigma_u^2 \Psi = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n_m} \end{bmatrix} \dots (6.51)$$

حيث تصبح المصفوفة Ψ ، هنا، معروفة ومنه يمكن حساب مقدار

المربعات الصغرى المعممة $\hat{\beta}_G$ بالمعادلة (9.6) حيث أن:

$$P'P = \Psi^{-1} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_m \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{n_m} \end{bmatrix}$$

ومنه تكون المتغيرات المحولة على الشكل:

$$PX = \sqrt{n_i} x_i, \quad PY = \sqrt{n_i} y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ولنفترض النموذج التالي:

$$y_{ij} = \alpha + \beta x_i + u_{ij} \dots (6.52)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n_i$$

وإذا مثلنا أخطاء كل فئة n_i بالرمز U_i ووضعنا الفرضيات:

$$E(U_i) = 0, \quad E(U_i U_i') = \sigma_i^2 I_{n_i} \dots (6.53)$$

فلاحظ بأن المعادلة (53.6) تسمح لتباين هذه الأخطاء لأن يكون غير متجانس في مختلف الفئات n_i . ولنفرض أن التباينات المشتركة لأخطاء الفئات المختلفة معدومة أي:

$$E(U_i U'_s) = 0: i \neq s, \dots (6.54)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$s = 1, 2, \dots, m$$

ومنه يمكن كتابة النموذج الكامل على الشكل:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \vdots \\ X_m^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \dots (6.55)$$

حيث أن:

$$X_i^* = \begin{bmatrix} 1 & X_i \\ 1 & X_i \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ومنه نكتب النموذج (55.6) على الشكل:

$$Y^* = X^* \beta^* + U^* \dots (6.56)$$

حيث أن:

$$Y^{*'} = [Y_1' \quad Y_2' \quad \dots \quad Y_m']$$

$$U^{*'} = [U_1' \quad U_2' \quad \dots \quad U_m']$$

$$\beta^{*'} = [\alpha \quad \beta]$$

إن الفرضيات (53.6)، (54.6) تعطي مصفوفة على الشكل كتلة -قطرية للتباين $\text{var}(U^*)$:

$$\text{var}(U^*) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_m^2 I_{n_m} \end{bmatrix} \dots (6.57)$$

إن النموذج (55.6) هو حالة خاصة للنموذج الخطي العام والذي يمكن كتابته على الشكل:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^* \\ \vdots \\ X_m^* \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} \dots (6.58)$$

حيث أن:

$$X^* = x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, k$$

إذ أن كل X_i^* أعلاه هي $n_i \times k$ وليست بالضرورة أن تكون أسطر X_i^* متماثلة. وتبقى فرضيات تباين الأخطاء بالمعادلة (57.6) صالحة. فمثلا يمكن لـ y_{ij} أن تمثل الطلب على التوظيف للأفراد ذوي مستوى معين في فئة من فئات الصناعة و X^* هي المتغيرات التي تؤثر على هذا الطلب. ويمكن للدراسة أن تشمل على m صناعة (أو على m مؤسسة صناعية) وعينة n من العمال أو الموظفين المطلوبين. ويمكن أن تكون دراسة الطلب هذه لـ m مؤسسة بالنسبة لعدة سنوات. وهذا ما يعرف بالبيانات الممزوجة *pouled-data*، وهذا ما يسمح باختلاف تباينات الأخطاء عبر هذه المؤسسات.

6-2-1 الحلول لظاهرة عدم تجانس التباينات

كما ذكرنا في بداية هذه الفقرة، لما نواجه مخالفة الفرضية الثانية في شكل المعادلة (2.6)، فإننا نقوم بتحويل النموذج الأصلي بطريقة ما (إيجاد المصفوفة غير الشاذة P) تجعل الأخطاء المحولة (PU) لها تباينات متجانسة بالنسبة لكل الملاحظات الخاصة بالعينة. ومن ثم نطبق قانون المربعات الصغرى العادية على النموذج المحول (بعد تعديل البيانات الأصلية). إن تعديل النموذج يعتمد على شكل العلاقة بين التباين بالمعادلة (2.6) وقيم مصفوفة المتغيرات المستقلة X حيث هناك عدة عوامل مساعدة على وجود ظاهرة عدم تجانس تباينات الأخطاء.

نحاول، كمرحلة أولى، بناء سلسلة من الصيغ الممكنة لهذه الظاهرة والمتناسبة مع المعادلة (2.6)، ثم نوضح ذلك بأمثلة نظرية. ولنعتبر الحالات التالية:

$$i) \text{ var}(u_i) = \sigma_i^2 = \gamma z_i: \gamma > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$$ii) \text{ var}(u_i) = \gamma z_i^2: \gamma > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$$iii) \text{ var}(u_i) = \gamma_1 + \gamma_2 z_i: \gamma_1 > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$$iv) \text{ var}(u_i) = \exp[\gamma_1 + \gamma_2 z_i], i = 1, 2, \dots, n$$

$$v) \text{ var}(u_i) = \begin{cases} \sigma_1^2: i = 1, 2, \dots, n_1 \\ \sigma_2^2: i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2 \end{cases}$$

إن الصيغة (iii) هي توسيع للفرضية (i) و(ii) إلى الشكل الخطي في المتغير Z. وتقبل إمكانية اختبار فرضية عدم $H_0: \sigma_i^2 = \sigma_u^2$ ضد الفرضية البديلة H_A والخاصة بعدم تجانس تباينات الأخطاء وذلك بإسم عدم التجانس المتزايد. أما الصيغة (iv) فهي مماثلة لسابقتها ولكنها تمثل عدم تجانس التباينات المتعدد للأخطاء. أما الصيغة (v) فتمثل حالة البيانات النوعية Dummy مثلما يحدث مع البيانات الموسمية.

مثال (1.6):

نفرض النموذج الخطي البسيط $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ بالإضافة إلى
الفرضية التالية:

$$E(u_i^2) = \sigma_i^2 \neq \sigma_u^2 \dots (6.59)$$

وللحصول على مقدرات المربعات الصغرى المعممة والمناسبة للمعادلة
(9.6)، يجب معرفة شكل ونوع هذه التباينات المعطاة بالعلاقة (59.6)، حتى نستطيع
إيجاد شكل المصفوفة غير الشاذة P ومنه تحويل البيانات. وللقيام بذلك هناك عدة
حالات ممكنة:

الحالة الأولى: إذا كانت العلاقة (59.6) على الشكل:

$$E(u_i^2) = \sigma_i^2 = \sigma_u^2 x_i^2 \dots (6.60)$$

فهذا معناه أن تباين الخطأ العشوائي u_i يزداد طردياً مع مربع المتغير
المستقل x_i . وإذا حلينا من أجل القيمة الثابتة والموجبة σ_u^2 نجد:

$$\sigma_u^2 = \sigma_i^2 / x_i^2$$

ومنه نستنتج أن التحويل يكون بواسطة تقسيم النموذج الأصلي على x_i
وهو الجزء المناسب للمصفوفة P حيث أن:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P'P = \Psi^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_n^2} \end{bmatrix}$$

فيكون النموذج المحول هو:

$$\frac{y_i}{x_i} = \alpha \left(\frac{1}{x_i} \right) + \beta + \frac{u_i}{x_i} \dots (6.61)$$

ويصبح المتغير العشوائي الجديد (u_i / x_i) له تباينات ثابتة ومتجانسة كمايلي:

$$E(u_i / x_i)^2 = \frac{1}{x_i^2} \cdot E(u_i^2) = \frac{1}{x_i^2} \cdot \sigma_i^2 = \sigma_u^2$$

ومنه نستطيع تطبيق قانون المربعات الصغرى العادية على النموذج المحول بالمعادلة (61.6) ونسميها المربعات الصغرى المرجحة (Weighted Least Squares). ومنه يكون مقدار المربعات الصغرى المعممة (أو المرجحة) للنموذج المحول أعلاه هو:

$$\hat{\beta}_G = \left(\frac{y_i}{x_i} \right) - \hat{\alpha}_G \cdot \left(\frac{1}{x_i} \right)$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_G) = \frac{\sigma_u^2 \sum_{i=1}^n (1/x_i)^2}{n \sum \left[\left(\frac{1}{x_i} \right) - \left(\frac{1}{x_i} \right) \right]^2}$$

أما بالنسبة لمقدرات المعقولة العظمى تكون:

$$L(\alpha, \beta, \sigma_i^2) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \sum (\sigma_i^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum \left(\frac{y_i - \alpha - \beta x_i}{\sigma_i} \right)^2 \right] \dots (6.62)$$

وبإدخال اللوغاريتم الطبيعي على المعادلة (62.6) نجد:

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \sigma_i^2 - \frac{1}{2} \sum \log \left(\frac{y_i - \alpha - \beta x_i}{\sigma_i} \right)^2$$

وباستعمال المعادلة (60.6) تصبح:

$$\log L = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma_u^2 - \frac{1}{2} \sum \log x_i^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2} \sum \left(\frac{y_i - \alpha - \beta x_i}{x_i} \right)^2$$

$$= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma_u^2 - \sum \log x_i - \frac{1}{2\sigma_u^2} \sum \left(\frac{y_i - \alpha - \beta x_i}{x_i} \right)^2$$

وتكون مشتقات Log L بالنسبة لـ α ، β ، σ_u^2 كما يلي:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma_u^2} \sum \left[\frac{y_i - \alpha - \beta x_i}{x_i^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma_u^2} \sum \left[\frac{(y_i - \alpha - \beta x_i)x_i}{x_i^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_u^2} = \frac{-n}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\sigma_u^4} \sum \left[\frac{y_i - \alpha - \beta x_i}{x_i^2} \right]^2 = 0$$

ومنہ ينتج:

$$\tilde{\beta}_G = \frac{\sum (1/x_i^2) \cdot \sum (y_i/x_i) - \sum (1/x_i) \cdot \sum (y_i/x_i^2)}{\sum (1/x_i^2) - [\sum (1/x_i)]^2}$$

$$\tilde{\alpha}_G = \frac{\sum (y_i/x_i^2)}{\sum (1/x_i^2)} - \tilde{\beta}_G \left[\frac{\sum (1/x_i)}{\sum (1/x_i^2)} \right]$$

حيث أن $\tilde{\alpha}_G$ و $\tilde{\beta}_G$ هما مقدرتي المعقولة العظمى لـ α و β على الترتيب وهما مقدرتان متسقتان وغير متحيزتين ولهما خاصية أفضل مقدرات خطية غير متحيزة BLUE. أما المقدّر $\tilde{\sigma}_{uG}^2$ فيكون متسقا تقاربيا ولكنه متحيز في العينات الصغيرة وهو:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{uG}^2 &= \frac{1}{n} \sum \left[\frac{y_i}{x_i} - \tilde{\alpha}_G \left(\frac{1}{x_i} \right) - \tilde{\beta}_G \right]^2 \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum \left(\frac{y_i}{x_i} \right)^2 - \tilde{\alpha}_G \sum \left(\frac{y_i}{x_i^2} \right) - \tilde{\beta}_G \sum \left(\frac{y_i}{x_i} \right) \right] \end{aligned}$$

الحالة الثانية: لنعتبر الآن المعادلة (59.6) على الشكل:

$$E(u_i^2) = \sigma_i^2 = \sigma_u^2 x_i \dots (6.63)$$

ومنہ تكون المصفوفة غير الشاذة P على الصيغة التالية:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{x_n}} \end{bmatrix},$$

$$P'P = \Psi^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix},$$

ويكون النموذج المحول هو حاصل ضرب النموذج الأصلي بالترجيح $(1/\sqrt{x_i})$ أي:

$$\frac{y_i}{\sqrt{x_i}} = \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{x_i}} \right) + \beta \cdot \frac{x_i}{\sqrt{x_i}} + \frac{u_i}{\sqrt{x_i}}$$

$$y_i x_i^{-1/2} = \alpha x_i^{-1/2} + \beta x_i^{+1/2} + u_i x_i^{-1/2}$$

ومنه تصبح تباينات الأخطاء الجديدة (المحولة) متجانسة:

$$E(u_i / \sqrt{x_i})^2 = \frac{1}{x_i} E(u_i^2) = \frac{\sigma_i^2}{x_i} = \sigma_u^2$$

ويمكن مباشرة تطبيق قانون المربعات الصغرى المرجحة على النموذج المحول لنحصل على مقدرات تتوفر فيها الخصائص المفضلة للمقدرات. وإذا طبقنا طريقة المعقولة العظمى على النموذج المحول فيمكن ملاحظة أنه من المعادلة (63.6) نجد:

$$\log \sigma_i = \frac{1}{2} (\log \sigma_u^2 + \log x_i) = \log \sigma_u + \frac{1}{2} \log x_i$$

وباستعمال نفس الطريقة الموجودة بالمعادلة (62.6)، في الحالة الأولى، يمكن الحصول على مقدرات متسقة.

الحالة الثالثة: يمكن توسيع الصيغة (iii) و (iv) إلى الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \text{var}(u_i) &= \sigma_i^2 = \gamma_1 + \gamma_2 z_{2i} + \dots + \gamma_s z_{si} \\ &= Z_i' \gamma \quad : i = 1, 2, \dots, n \dots (6.64) \end{aligned}$$

حيث أن Z_i' هي موجه سطر بعناصر على الشكل:

$$Z_i' = \left(1 \quad z_{2i}, \dots, z_{si} \right) \quad \text{و} \quad \gamma' = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$$

وبنفس الطريقة يمكن لعدم تجانس تباينات الأخطاء المتعدد أن يكون بالصيغة التالية:

$$\begin{aligned}\text{var}(u_i) &= \sigma_i^2 = \exp[\gamma_1 + \gamma_2 z_{2i} + \dots + \gamma_s z_{si}] \\ &= \exp[Z_i' \gamma], i = 1, 2, \dots, n \dots (6.65)\end{aligned}$$

ويمكن صياغة المعادلة (65.6) على شكل آخر مثل:

$$\sigma_i^2 = \exp(\gamma_1) \cdot \exp(z_i' \gamma^*)$$

$$z_i = \begin{pmatrix} 1 \\ z_i^* \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma^* \end{pmatrix} \quad \text{حيث أن:}$$

وبناء على هذا التعريف يمكن الكتابة:

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= \exp(\gamma_1) \cdot \exp(z_i' \gamma^*) \\ &= \sigma_u^2 \exp[z_i' \gamma^*] \dots (6.66)\end{aligned}$$

حيث أن العدد الثابت هو: $\sigma_u^2 = \exp(\gamma_1)$

ويكون إختبار تجانس تباينات الأخطاء هو التأكد من صحة الفرضية:

$$H_0: \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_s = 0 \dots (6.67)$$

ونلاحظ أن هذه الحالة تحتوي ضمنيا الحالتين (الأولى والثانية) في مثالنا أعلاه.

$$z_{2i} = \log x_{ij}$$

حيث إذا أخذنا:

$$\gamma_2 = 2, \quad \gamma_s = 0 \quad : s \geq 3$$

مع القيمة الثابتة $\gamma_1 = \log \sigma_u^2$ ، فإن المعادلة (65.6) تصبح:

$$\sigma_i^2 = \sigma_u^2 \exp[\log x_{ij}^2] = \sigma_u^2 x_{ij}^2$$

وهو ما يتطابق مع الحالة الأولى لمثالنا. أما إذا كتبنا الصيغة (iii):

$$E(u_i^2) = \sigma_i^2 = \gamma_1 + \gamma_2 z_i$$

حيث أن z_i يمكن ألا تكون محتواة في المتغير المستقل x_i (أو المصفوفة

x في حالة النموذج المتعدد) للمعادلة الأصلية. إن الميزة الأساسية لهذا الشكل هو

أن الفرضية الخاصة بتجانس تباينات الأخطاء يمكن أن تكتب على الشكل:

$H_0: \gamma_2 = 0$ ضد الفرضية البديلة $H_A: \gamma_2 \neq 0$ حيث أنه يمكن الكتابة:

$$u_i^2 = \gamma_1 + \gamma_2 z_i + v_i \dots (6.68)$$

$$E(u_i^2) = \text{var}(u_i) = \gamma_1 + \gamma_2 z_i = \sigma_i^2$$

حيث أن v_i متغير عشوائي بوسط مساوي للصفر. وتسمى هذه الطريقة بطريقة خطوتين للمربعات الصغرى المرجحة 2step-wls. فإذا عوضنا الأخطاء u_i بمقدراتها \hat{u}_i (من المربعات الصغرى العادية)، يمكن أن نقدر γ_1 و γ_2 بواسطة المربعات الصغرى العادية. ومنه نستطيع الحصول على مقدر لـ σ_i^2 ولتكن $\hat{\sigma}_i^2$. ثم نعيد تقدير المعادلة الأصلية مع الأخذ بعين الاعتبار ظاهرة عدم تجانس تباينات الأخطاء. بصيغة أخرى تجري وفق الخطوات التالية:

(a) قدر المعادلة الأصلية بواسطة المربعات الصغرى العادية وأحسب البواقي \hat{u}_i .

(b) حذر \hat{u}_i^2 في المتغير z_i للحصول على مقدرات المربعات الصغرى $\hat{\gamma}_1$ و $\hat{\gamma}_2$ ومنهما أحسب: $\hat{\sigma}_i = \sqrt{\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 z_i}$

(c) قسم المعادلة الأصلية على $\hat{\sigma}_i$ ، ثم قدر المعادلة المحولة بواسطة المربعات

$$\text{الصغرى مرة أخرى أي نقدر المعادلة: } y_i / \hat{\sigma}_i = \alpha \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_i} \right) + \beta x_i / \hat{\sigma}_i + u_i / \hat{\sigma}_i$$

لكن في حالة ما إذا أخذت إحدى الملاحظات $(\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 z_i)$ قيمة سالبة لا يمكن تطبيق هذه الطريقة عليها. حيث نقترح شكلا آخر يتحاشى هذه المشكلة كمايلي:

$$E(u_i^2) = (\gamma_1 + \gamma_2 z_i)^2 = \sigma_i^2 \dots (6.69)$$

ونستعمل القيم المطلقة للبواقي $|\hat{u}_i|$ بدلا من مربع البواقي عند تقدير المعلمتين γ_1 و γ_2 ويمكن إجراء التقدير وفقا للخطوات التالية:

(a) قدر المعادلة الأصلية بواسطة المربعات الصغرى العادية، وأحسب البواقي \hat{u}_i .

(b) حذر $|\hat{u}_i|$ في المتغير z_i للحصول على $\hat{\gamma}_1$ و $\hat{\gamma}_2$ بواسطة قانون المربعات الصغرى العادية، ثم أحسب المقدر: $\hat{\sigma}_i = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 z_i$

(c) قسم المعادلة الأصلية على $\hat{\sigma}_i$ وأجري قانون المربعات الصغرى ثانية على

$$\text{النموذج المحول التالي: } y_i / \hat{\sigma}_i = \alpha \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_i} \right) + \beta x_i / \hat{\sigma}_i + u_i / \hat{\sigma}_i$$

2-2-6 حساب مقدر المربعات الصغرى المعممة الممكن Feasible GLS

حصلنا بالمعادلة (9.6) على مقدر المربعات الصغرى المعممة $\hat{\beta}_G$. ولكننا لا نعرف عناصر المصفوفة المحددة والموجبة Ψ . فمن الصعب تقدير أو معرفة القيمة التقديرية لـ $\hat{\beta}_G$ وذلك لعدم تمكننا من إيجاد المصفوفة الغير شاذة P . أما إذا كانت صيغة عدم تجانس تباينات الأخطاء معروفة، مثلاً، على الشكل الموجود بالمعادلة (65.6) فإننا نقوم بتطبيق قانون المربعات الصغرى العادية على النموذج الخطي العام $Y = X\beta + U$ لنحصل على بواقي المربعات الصغرى $\hat{U} = Y - X\hat{\beta}$. حيث أن $\hat{\beta}$ هو مقدر المربعات الصغرى العادية، ومن ثم نتبع الخطوات التالية:

1- نكون الملاحظات $\log \hat{u}_i^2$ ، $i = 1, 2, \dots, n$

2- لكي نقدر الموجه γ (بالمعادلة (65.6))، نكون الإنحدار التالي:

$$\log \hat{u}_i^2 = z_i' \gamma + v_i \dots (6.70)$$

ونكتب العبارة (70.6) على الصيغة التالية:

$$q = Z\gamma + V \dots (6.71)$$

حيث أن V موجه أخطاء عشوائية بوسط صفر وتباين ثابت.

3- نطبق قانون المربعات الصغرى على المعادلة (71.6) لنجد:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &= (Z'Z)^{-1}Z'q \\ &= \gamma + (Z'Z)^{-1}Z'V \end{aligned}$$

حيث لدينا:

$$\begin{aligned} v_i &= \log \hat{u}_i^2 - Z_i' \gamma = \log \hat{u}_i^2 - \log[\exp(Z_i' \gamma)] \\ &= \log \hat{u}_i^2 - \log \sigma_i^2 \\ &= \log[\hat{u}_i^2 / \sigma_i^2] \end{aligned}$$

4- بعد الحصول على موجه المقدرات $\hat{\gamma}$ (من الخطوة 3) نعود للنموذج الخاص بصيغة عدم تجانس تباينات الأخطاء المتعدد بالمعادلة (65.6) وهو:

$$\text{var}(u_i) = \sigma_i^2 = \exp[Z_i'\gamma]$$

ونعوض الموجه γ بمقدره $\hat{\gamma}$ لنجد:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \exp[Z_i'\hat{\gamma}]$$

وبتعويض هذه القيم المقدرة $\hat{\sigma}_i^2$ في المصفوفة Ψ بالمعادلة (9.6) والمصفوفة Φ بالمعادلة (14.6) نجد، على الترتيب، $\hat{\Psi}$ و $\hat{\Phi}$ وبالتالي مقدر المربعات الصغرى المعممة الممكن وهو على النحو:

$$\hat{\beta}_{GF} = (X'\hat{\Psi}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Psi}^{-1}Y \dots (6.72)$$

$$\hat{\beta}_{GF} = (X'\hat{\Phi}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Phi}^{-1}Y \dots (6.73)$$

3-2-6 إكتشاف ظاهرة عدم تجانس تباينات الأخطاء

لاكتشاف ظاهرة عدم تجانس تباينات الأخطاء يستعمل باحثوا القياس الإقتصادي عدة طرق مختلفة. إذ يمكن أن نستعمل إنحدار بواقي المربعات الصغرى العادية \hat{u}_i في سلسلة المتغير المستقل X_i على الشكل (X_i^2, X_i^3, \dots) ، أو إنحدار القيم المطلقة $|\hat{u}_i|$ أو \hat{u}_i^2 في سلسلة $(X_i, X_i^2, X_i^3, \dots)$. وفي حالة الإنحدار المتعدد يجب استعمال قوى القيمة التقديرية للمتغير التابع أي $(\hat{Y}_i, \hat{Y}_i^2, \hat{Y}_i^3, \dots)$ أو قوى كل المتغيرات المستقلة X_{ji} . ومن بين الإختبارات المعتمدة على هذه الأفكار نجد:

1- الإختبار المقترح من طرف F.J. Anscombe 1961، وإختبار آخر مقترح من طرف J.B. Ramsey 1969، ويعتمد كلا الإختبارين على تحديد مربعات البواقي في \hat{u}_i^2 في السلسلة $(\hat{Y}_i^2, \hat{Y}_i^3, \dots)$ ، ثم يدرسان المعنوية الاحصائية لمعالم الإنحدارات.

2- الإختبار المقترح من طرف H. White، ويعتمد على تحديد \hat{u}_i^2 في كل المتغيرات المستقلة، مربعاتها وحاصل ضرب قيمها المتقاطعة. فمثلا بالنسبة للنموذج:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + u_i$$

يعتمد هذا الإختبار على تحديد \hat{u}_i^2 في السلسلة التالية:

$$[X_{2i}, X_{3i}, X_{4i}, X_{2i}^2, X_{3i}^2, X_{4i}^2, X_{2i}X_{3i}, X_{3i}X_{4i}, X_{2i}X_{4i}]$$

3- ويقترح H. Glejser تقدير الإنحدارات من الشكل:

$$|\hat{u}_i| = \alpha + \beta x_i,$$

$$|\hat{u}_i| = \alpha + \beta / x_i,$$

$$|\hat{u}_i| = \alpha + \beta \sqrt{x_i}$$

وغيرها من الأشكال المختلفة. ثم يختبر الفرضية $H_0: \beta = 0$.
وسنوضح أهم الإختبارات المشهورة في إكتشاف ظاهرة عدم تجانس تباينات الأخطاء ومنها نذكر:

1-3-2-6 إختبار نسبة المعقولية LR Test

يصلح هذا الإختبار للعينات الكبيرة. حيث إذا كان عدد الملاحظات كبيرا، نستعمل هذا الأخير عن طريق تقسيم بواقي المربعات الصغرى العادية إلى m فئة مع كل فئة i لها n_i ملاحظات، بحيث تحقق $\sum_{i=1}^m n_i = n$. ثم نقدر تباينات الأخطاء في كل فئة (i) ونرمز لها بالرمز $\hat{\sigma}_i^2$. ليكن مقدار تباين الخطأ من العينة الكلية n هو $\hat{\sigma}_u^2$.
فإذا عرفنا λ على الشكل:

$$\lambda = \prod_{i=1}^m (\hat{\sigma}_i)^{n_i} / (\hat{\sigma}_u)^n \dots (6.74)$$

حيث أن:

$$n = \sum_{i=1}^m n_i$$

فإن القيمة $-2 \log \lambda$ للعبارة (74.6)، يكون لها توزيع $\chi^2_{(m-1)}$. فإذا

كانت العبارة $-2 \log \lambda \sim \chi^2_{(m-1)}$ ، أكبر من القيمة المجدولة $\chi^2_{\alpha\%, (m-1)}$ ، نقول عن فرضية العدم بأنها مرفوضة وبالتالي يوجد مشكل عدم تجانس تباينات الأخطاء. ومنه يجب استعمال تقنية من التقنيات المذكورة من قبل، من أجل الحصول على مقدرات المربعات الصغرى المعممة. ويستعمل الباحث (6) Feldstein هذا الإختبار في إنحذارات التكلفة بالمستشفيات حيث يقسم العدد الإجمالي للملاحظات إلى أربعة فئات متساوية الحجم. ويرتب البواقي بواسطة القيم التقديرية للمتغير التابع.

2-3-2-6 إختبار Goldfeld-Quandt

يصلح هذا الإختبار للعينات الصغيرة والكبيرة. حيث يشترط أن يكون حجم العينة على الأقل ضعف عدد المعالم المطلوب تقديرها في النموذج. أستعمل هذا الإختبار لأول مرة من طرف الباحثين Goldfeld-Quandt 1972. حيث إذا رأينا أن أحد المتغيرات المستقلة X_{ji} هو المتسبب في ظاهرة عدم تجانس تباينات الأخطاء. نعتبر في هذه الحالة، أن σ_i^2 مرتبطة ومتناسبة إيجابيا (طرديا) مع أحد المتغيرات X_{ji} . ثم نقوم بتقسيم الملاحظات إلى عينتين، العينة الأولى تناسب قيم X_{ji} الكبيرة، والعينة الثانية تخص قيم X_{ji} الصغيرة. ثم نوفق إنحذارين مختلفين (منفصلين) على عينتين مختلفين (لكن متساويتين في الحجم)، وذلك لهدف تطبيق إختبار مساواة تبايني أخطاء العينتين المنفصلتين. ويقترح هذين الباحثين حذف بعض الملاحظات المركزية من العينة الأصلية لكي نفرق مابين تباين أخطاء العينتين.

6- أنظر

- G.S. MADDALA "Introduction to Econometrics" Mac-Millan publishing Company. New York 1988. Chap 5, Page 164.

مثال (2.6):

لنعتبر النموذج الخطي البسيط: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i, i = 1, 2, \dots, n$

ولنفترض أن الأخطاء u_i لها التوزيع الطبيعي وغير مرتبطة فيما بينها

أي أن $E(u_i u_j) = 0, i \neq j$. فإذا كانت لدينا:

$$E(u_i^2) = \sigma_u^2 = \sigma_{u_i}^2$$

ويجرى إختبار (G - Q) وفقا للخطوات التالية:

- 1- نرتب الملاحظات y_i و x_i وفقا لقيم x_i (من القيمة الصغيرة إلى القيمة الكبيرة)
- 2- نحذف (نسقط) m ملاحظات مركزية ليكون الباقي هو $(n - m)$ ملاحظات متبقية ثم نقسم الباقي $(n - m)$ إلى عينتين متساويتين $(n - m)/2$.
تحتوي الأولى على $(n - m)/2$ من قيم x_i الصغيرة، وتحتوي الثانية على $(n - m)/2$ ملاحظات من قيم x_i الكبيرة.

3- نكون إنحدارين منفصلين بواسطة المربعات الصغرى العادية شريطة أن يكون

$$\left(\frac{n - m}{2} \right) > k \text{ على الصيغة التالية:}$$

$$a) y_i = \alpha + \beta x_i + u_i: i = 1, 2, \dots, \frac{n - m}{2},$$

$$b) y_i = \alpha + \beta x_i + u_i: i = \frac{n - m}{2} + 1, \frac{n - m}{2} + 2, \dots, n.$$

نحصل من الإنحدار الأول على مجموع مربعات البواقي RSS_a ، ومن

الإنحدار الثاني على RSS_b .

4- نكون الإختبار الإحصائي التالي:

7- حيث أن m عادة يساوي على الأقل ربع العينة $(n/4)$. فمثلا العدد الأمثل لـ m لما تكون

$n = 30$ هو $m = 8$. ولما تكون $n = 60$ ، فإن $m = 16$ ، وهكذا.

$$\frac{RSS_a}{\sigma_u^2} \sim \chi_{(n-m-2k)/2}^2$$

$$\frac{RSS_b}{\sigma_u^2} \sim \chi_{(n-m-2k)/2}^2$$

ومنه نجد التوزيع:

$$Q = \frac{RSS_a/V_1}{RSS_b/V_2} = \frac{RSS_a}{RSS_b} \sim F_{V_1, V_2} \dots (6.75)$$

حيث أن: $V_1 = V_2 = (n - m - 2k)/2$

فإذا كانت $Q = 1$ يعني هذا تساوي التباينين ومنه نقبل H_0 القائلة بتجانس تباينات الأخطاء. وكلما كان المقدار Q كبيرا، كلما كان عدم التجانس أقوى. وتعتمد قوة الاختبار كذلك على عدد الملاحظات المركزية والمحذوفة من الحجم الكلي للعينة، حيث يقترح (8) Johnston أن يكون هذا العدد في حدود ثلث حجم العينة الأصلية.

3-3-2-6 اختبار Breusch-Pagan:

يعتبر اختبار الباحثين Breusch-Pagan 1979 بسيطا، حيث يعتمد على بواقي المربعات الصغرى في النموذج الخطي العام (أو البسيط). ويفترض أن تكون الأخطاء u_i موزعة طبيعيا وإستقلاليا وبتباين من الشكل الموجود بالمعادلة:

$$E(u_i^2) = \sigma_i^2 = f(\gamma_1 + \gamma_2 z_{2i} + \dots + \gamma_s z_{si}) = f(z_i' \gamma) \dots (6.76)$$

8- أنظر:

J. Johnston "Econometric Methods" Chap 8, Page 301 1984. (مرجع سابق)

حيث يكون شكل الدالة $f(.)$ غير مخصص، كما أن γ هو موجه المعالم $(s \times 1)$ مستقل عن موجه المعالم β ، و z_1 هو موجه متغيرات $(s \times 1)$ نظن أنها تؤثر (أو تشجع) على وجود ظاهرة عدم تجانس تباينات الأخطاء. ويختبر الباحثان $(B - P)$ الفرضية التالية:

$$H_0: \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_s = 0$$

فإذا كانت الفرضية H_0 صحيحة فمعنى ذلك أن $\sigma_u^2 = f(\gamma_1) = \sigma_u^2$. بقية المتغيرات (z_{21}, \dots, z_{s1}) يمكن أن تحتوي جزئيا على المتغيرات المستقلة، X_{ji} ، ولا يعتبر ذلك شرطا مسبقا. أي أن تجانس تباينات الأخطاء يمكن أن يكون متحكما فيه بواسطة المتغيرات المستقلة في العلاقة الهيكلية للنموذج. وليكن $\hat{\sigma}_u^2$ على الشكل:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum \hat{U}_i^2}{n} = \frac{\hat{U}'\hat{U}}{n}$$

حيث أن $\hat{U} = Y - X\hat{\beta}$ هي بواقي المربعات الصغرى العادية. لنحدر \hat{U}_i^2 في المتغيرات $(z_{21}, z_{31}, \dots, z_{s1})$ لنحصل على مجموع مربعات الانحرافات المشروحة ESS. ومن ثم نكون الإختبار التقاربي التالي:

$$Q = \frac{ESS}{2\hat{\sigma}_u^2} \sim \chi_{(s-1)}^2 \dots (6.77)$$

إن العبارة (77.6) هي إختبار تقاربي. ومنه إذا كانت Q أكبر من القيمة المجدولة نرفض فرضية العدم H_0 ، ليكون ذلك دليلا على وجود ظاهرة عدم تجانس تباينات الأخطاء.

مثال (3.6):

ليكن لدينا النموذج الخطي العام $Y = X\beta + U$ ، مع عدم تجانس تباينات الأخطاء المتعدد على الشكل:

$$E(U_i^2) = \sigma_i^2 = \exp(Z_i' \gamma) \\ = \sigma_u^2 \exp(Z_i' \gamma^*) \dots (6.78)$$

حيث أن γ^* ، Z_i^* معرفتين بالمعادلة (66.6) بأبعاد هي $1 \times (s-1)$ ، $n \times (s-1)$ على الترتيب، يكون الاختبار معتمدا على الفرضية التالية:

$$H_0: \gamma^* = 0$$

$$H_A: \gamma^* \neq 0$$

ويجري وفقا للخطوات التالية:

1- نطبق قانون المربعات الصغرى العادية على النموذج الخطي العام أعلاه، ثم نحسب البواقي \hat{U}_i .

2- باستعمال هذه البواقي \hat{U}_i ، نحسب الكمية $\hat{\sigma}_u^2 = \hat{U}'\hat{U}/n$. ثم نكون سلسلة المتغير الجديد $g_i = \hat{U}_i^2 / \hat{\sigma}_u^2$.

3- نجري إنحدار g_i في Z_i' بواسطة المربعات العادية، لنحصل على مجموع مربعات الانحرافات المشروحة ESS من هذا الإنحدار الأخير.

4- نكون الكمية:

$$Q = \frac{ESS}{2} \sim \chi_{(s-1)}^2$$

ومنه إذا كانت هذه القيمة، Q ، أكبر من القيمة المجدولة بمستوى معنوية $\lambda\%$ ، نرفض فرضية تجانس تباينات الأخطاء.

أما إذا كانت المعادلة (78.6) من النوع:

$$\sigma_i^2 = \exp[\gamma_1 + \gamma_2 Z_i] \dots (6.79)$$

فبعد إجراء نفس الخطوات السابقة، يكون الاختبار على الشكل:

$$Q = \frac{ESS}{2} \sim \chi_1^2$$

ويمكن كذلك إجراء اختبار المعادلة من الشكل (78.6) على النحو التالي:

1- في ظل فرضية العدم H_0 يكون $\gamma^* = 0$ ومنه تصبح:

$$\sigma_i^2 = \exp[\gamma_1 + V_i]$$

$$\log(^9) \hat{U}_i^2 = \log \sigma_i^2 = \gamma_1 + V_i \dots (6.80)$$

2- في ظل الفرضية البديلة H_A تكون $\gamma^* \neq 0$ ومنه نكتب (78.6):

$$\log \hat{U}_i^2 = \gamma_1 + Z_i' \gamma^* + V_i \dots (6.81)$$

3- نطبق قانون المربعات الصغرى العادية على المعادلة (80.6) لنحصل على مجموع مربعات البواقي المقيدة RRSS، وعلى المعادلة (81.6) لنحصل على مجموع مربعات البواقي غير المقيدة URSS.

4- نكون الاختبار الإحصائي التالي:

$$Q = \frac{(RRSS - URSS)/(s - 1)}{URSS/(n - s)} \sim F_{(s-1), (n-s)} \dots (6.82)$$

إذا كانت Q المحسوبة أعلاه، أكبر من القيمة المجدولة بمستوى معنوية $\lambda\%$ ، فإننا نرفض الفرضية H_0 ، وتكون التباينات غير متجانسة.

6-2-3-4 اختبار Glejser

كل الاختبارات السابقة الذكر، لا تخصص أي شكل لعدم تجانس تباينات الأخطاء وذلك للمساعدة على اشتقاق مقدار المربعات الصغرى المعممة $\hat{\beta}_G$. أما الباحث Glejser فيقترح، مثلما لاحظنا في بداية مناقشتنا لهذا الموضوع، معالجة الحالة التي يكون فيها المتغير الفردي Z_i هو الذي يحدد ظاهرة عدم تجانس تباينات الأخطاء. حيث يمكن للمتغير Z أن يكون أحد المتغيرات المستقلة في X في العلاقة الهيكلية للنموذج الأصلي. ومنه يقترح تحديد الملاحظات Y_i في X_i ، ثم نشق البواقي \hat{U}_i . بعدها، نحدر القيم المطلقة لهذه البواقي في المتغير Z' ، كمايلي:

$$|\hat{U}_i| = \delta_1 + \delta_2 Z_i' + V_i \dots (6.83)$$

9- نكتب \hat{U}_i^2 عوضا عن U_i^2 بسبب عدم مشاهدة القيم الحقيقية للأخطاء.

حيث نرى أن العلاقة في المعادلة (83.6) غير خطية في δ_1 ، δ_2 و γ .
ويقترح Glejser إعطاء قيم مخصصة مثل $\left[1, -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots\right]$ من أجل
الحصول على المقدرات المناسبة $(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2)$ ومن ثم نكون الفرضية:

$$H_0: \delta_2 = 0$$

$$H_A: \delta_2 \neq 0$$

ليكون قبول H_0 معناه تجانس تباينات الأخطاء.

مثال (4.6): لنعتبر النموذج الخطي البسيط

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

مع الفرضية:

$$\sigma_i^2 = E(u_i^2) = \sigma_u^2 X_i^\gamma \cdot e^{V_i} \dots (6.84)$$

مع العلم أن V_i متغير عشوائي بوسط صفر وتباين ثابت. إذا أخذنا
اللوغاريتم الطبيعي للعلاقة (84.6) نجد:

$$\begin{aligned} \log \sigma_i^2 &= \log \sigma_u^2 + \gamma \log X_i + V_i \\ &= \gamma_0 + \gamma \log X_i + V_i \end{aligned}$$

وإذا قدرنا النموذج الأصلي بواسطة المربعات الصغرى العادية، يمكن أن
نستعمل إنحدار البواقي \hat{u}_i^2 في $\log X_i$ لتقدير المعادلة الأخيرة أعلاه كمايلي:

$$\log \hat{u}_i^2 = \gamma_0 + \gamma \log X_i + V_i$$

ثم نجري إختبار التوزيع t على الميل γ على الشكل: $Q = \frac{\hat{\gamma}}{SE(\hat{\gamma})} \sim t_{n-2}$

فإذا كانت هذه القيمة، Q ، أقل من القيمة المجدولة للتوزيع t بدرجات
حرية $(n-2)$ ومستوى معنوية $\lambda\%$ ، نقول أن $\gamma = 0$. ونعتبر التباينات
متجانسة. أما إذا كانت $\gamma \neq 0$ فنعتبر التباينات غير متجانسة، ونقوم بتحويل
النموذج الأصلي، بإحدى الطرق المعروفة سابقا لنحصل على مقدر المربعات
الصغرى المعممة.

6-2-3-5 اختبار Bera-Mc Aller

يقترح هذان الباحثان Bera-Mc Aller 1982 النموذجين التاليين وفي ظل الفرضيتين البديلتين:

$$H_0: \log y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_{0t} \dots (6.85)$$

$$u_{0t} \sim IN(0, \sigma_0^2)$$

$$H_A: y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_{1t} \dots (6.86)$$

$$u_{1t} \sim IN(0, \sigma_1^2)$$

ويعتمد هذا الاختبار على ثلاثة خطوات:

- 1- نحصل على القيم التقديرية $\log \hat{y}_t$ ، و \tilde{y}_t من المعادلتين أعلاه على الترتيب. إن القيمة التقديرية لـ y_t من المعادلة (85.6) هي $\exp[\log \hat{y}_t]$ والقيمة التقديرية لـ $\log y_t$ من المعادلة (86.6) هي $\log(\tilde{y}_t)$.
- 2- نحسب الإحصارات الأصلية التالية:

$$a) \exp[\log \hat{y}_t] = \beta_0 + \beta_1 X_t + V_{1t}$$

$$b) \log(\tilde{y}_t) = \beta_0 + \beta_1 X_t + V_{0t}$$

ولتكن البواقي المقدرة من هذين الإحصارين هي \hat{V}_{1t} و \hat{V}_{0t} على الترتيب.

- 3- إن الاختبارات من أجل الفرضيتين البديلتين H_0 و H_A ، تعتمد على θ_0 ، و θ_1 في الإحصارين الإصطناعيين التاليين:

$$\log y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \theta_0 \hat{V}_{1t} + \varepsilon_t$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \theta_1 \hat{V}_{0t} + \varepsilon_t$$

نستعمل إختبارات التوزيع t العادية لإختبار الفرضيات. فإذا كانت

$\theta_0 = 0$ مقبولة، نختار النموذج (85.6). وإذا كانت $\theta_1 = 0$ مقبولة نختار النموذج

الخطي (86.6). إن المشكل الوحيد الذي يظهر هنا هو ماذا نفعل إذا قبلنا معا

الحالتين $(\theta_0 = 0 \text{ و } \theta_1 = 0)$ ، أو رفضنا معا الحالتين $(\theta_0 \neq 0 \text{ و } \theta_1 \neq 0)$.

بناءً على هذه العيوب جاء إختبار آخر للباحثين الثلاثة Mackinnon-White-Davidson 1983. حيث يستعمل هذا الأخير كذلك الإتحادات الإصطناعية، ولكن يحتوي فقط على خطوتين. حيث تكون الخطوة الأولى نفسها مثل إختبار (M - B). أما الخطوة الثانية فتختبر $\theta_0 = 0$ و $\theta_1 = 0$ في الإتحادات الإصطناعية التالية:

$$a) \log y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \theta_0 [\tilde{y}_t - \exp[\log \hat{y}_t]] + \varepsilon_t$$

$$b) y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \theta_1 [\log \hat{y}_t - \log \tilde{y}_t] + \varepsilon_t$$

4-2-6 التنبؤ في ظل عدم تجانس تباينات الأخطاء:

تتطلب منا مشاكل التنبؤ، إستعمال حلول خاصة عند ظاهرة عدم تجانس التباينات والإرتباط الذاتي للأخطاء بالنموذج الخطي العام. وذلك نظراً لإعتمادنا على طريقة التقدير بواسطة المربعات الصغرى المعممة. إذن لدينا النموذج $Y = X\beta + U$ مع الفرضية الموجودة بالمعادلة (2.6). حيث يكون مقدار المربعات الصغرى المعممة على شكل المعادلة (9.6).

يكون المشكل هنا، هو كيفية التنبؤ الفردي Y_s (حيث $s > n$) وذلك بمعرفتنا لموجه $k \times 1$ تنبؤات المتغيرات المستقلة x_s ، حيث أن:

$$y_s = x'_s \beta + u_s \dots (6.87)$$

حيث أن u_s هو القيمة الحقيقية السلمية (وغير المعروفة) لأخطاء التنبؤ. ولنفرض أن:

$$E(u_s) = 0, \quad E(u_s^2) = \sigma_s^2,$$

$$E(Uus) = E \begin{bmatrix} (u_1 u_s) \\ (u_2 u_s) \\ \vdots \\ (u_n u_s) \end{bmatrix} = \sigma_u^2 W$$

حيث أن w هو $n \times 1$ موجه التباينات المشتركة لأخطاء التنبؤ مع موجه أخطاء العينة. ولنعرف التنبؤ الخطي على الشكل:

$$\hat{y}_s = H.Y = h'Y \dots (6.88)$$

حيث أن H هو موجه سطر، و h هو $n \times 1$ موجه ثوابت. لكي تكون \hat{y}_s أحسن تنبؤ خطي غير متحيز، BLUP، يجب إختيار الموجه h لتصغير تباين التنبؤ، حيث ليكون الوسط لمقدر التنبؤ هو:

$$E(\hat{y}_s) = h'E(y) = h'X\beta$$

$$E(y_s) = E(x'_s\beta + u_s) = x'_s\beta$$

وكذلك لدينا:

$$E(\hat{y}_s) = E(y_s)$$

إذن نستنتج أن أي تنبؤ خطي وغير متحيز (بوسط مساوي للصفر أي $E(\hat{y}_s - y_s) = 0$) يجب أن يحقق الشرط التالي:

$$h'X = x'_s \dots (6.89)$$

ولنعرف بواقي التنبؤ الآن على الشكل:

$$\begin{aligned} d = y_s - \hat{y}_s &= x'_s\beta + u_s - h'X\beta - h'U \\ &= u_s - h'U \end{aligned}$$

ومنه يكون وسط بواقي التنبؤ هو:

$$E(d) = E(u_s) - h'E(U) = 0$$

أما التباين فهو:

$$\begin{aligned} \text{var}(d) &= \text{var}(y_s - \hat{y}_s) \\ &= E[u_s^2 - 2h'Uu_s + h'UU'h] \\ &= \sigma_s^2 - 2\sigma_u^2 h'w + \sigma_u^2 h'\psi h \end{aligned}$$

نقوم الآن بتصغير $\text{var}(d)$ تبعا للقيود الموجودة بالمعادلة (89.6)، وذلك

باستعمال مضاعفات لاقرانج:

$$S = \sigma_u^2 h'\psi h + \sigma_s^2 - 2\sigma_u^2 h'w + \lambda'(X'h - x_s) \dots (6.90)$$

حيث أن λ هي $k \times 1$ موجه لمضاعفات لاقرانج. وباشتقاق المعادلة (90.6) بالنسبة لكل من h ، λ على الترتيب، ثم مساواة نتائجنا لموجهات الصفر نجد:

$$\frac{\partial S}{\partial h} = 2\sigma_u^2 \psi h - 2\sigma_u^2 w + X\lambda = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = X'h - x_s = 0 \quad (b)$$

إذن المطلوب إيجاد الموجهين h ، λ حيث أن:

$$\begin{bmatrix} h \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sigma_u^2 \psi & X \\ X' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2\sigma_u^2 w \\ x_s \end{bmatrix}$$

ويمكن إستعمال قانون المقلوب العام للمصفوفة أعلاه، أو نضرب المعادلة (a) بواسطة المصفوفة $X'\psi^{-1}$ لنجد:

$$2\sigma_u^2 X'h - 2\sigma_u^2 X'\psi^{-1}w + X'\psi^{-1}X\lambda = 0$$

$$\lambda = 2\sigma_u^2 (X'\psi^{-1}X)^{-1} [X'\psi^{-1}w - X'h]$$

ولنعوض قيمة λ بالمعادلة (a) من جديد فنجد:

$$\begin{aligned} \psi h &= w - X(X'\psi^{-1}X)^{-1} [X'\psi^{-1}w - X'h] \\ &= [I - X(X'\psi^{-1}X)^{-1}X'\psi^{-1}]w + X(X'\psi^{-1}X)^{-1}x_s \end{aligned}$$

$$h = \psi^{-1} \left[[I - X(X'\psi^{-1}X)^{-1}X'\psi^{-1}]w + X(X'\psi^{-1}X)^{-1}x_s \right]$$

$$\hat{Y}_s = h'Y \quad \text{وعرفنا التنبؤ الخطي بالمعادلة (88.6) على الشكل:}$$

لينتج لدينا:

$$\hat{Y}_s = \left[w'(I - \psi^{-1}X(X'\psi^{-1}X)^{-1}X') + x'_s(X'\psi^{-1}X)^{-1}X' \right] \psi'^{-1}Y$$

$$= w'\psi^{-1}Y - w'\psi^{-1}X\hat{\beta}_G + x'_s\hat{\beta}_G$$

$$= x'_s\hat{\beta}_G + w'\psi^{-1}(Y - X\hat{\beta}_G)$$

$$\hat{Y}_s = x'_s\hat{\beta}_G + w'\psi^{-1}\hat{U}_G \dots (6.91)$$

$$\hat{U}_G = Y - X\hat{\beta}_G$$

حيث أن:

ولكننا نعرف بأن التنبؤ في ظل النموذج الخطي العام يكون على الشكل⁽¹⁰⁾:

10- أنظر الفصل الرابع، الفقرة الثالثة: إختبارات التنبؤ في ظل النموذج الخطي العام.

$$Y_n^m = X_n^m \beta + U_n^m$$

ومنه يكون:

$$E \begin{pmatrix} U \\ U_n^m \end{pmatrix} (U' \quad U_n'^m) = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \psi_n & w_n^m \\ w_n'^m & \psi_m \end{bmatrix}$$

إذن تصبح عملية التنبؤ بالعينة m ملاحظات في المستقبل مرة واحدة على الشكل:

$$\hat{Y}_n^m = X_n^m \hat{\beta}_G + w_n'^m \psi^{-1} \hat{U}_G \dots (6.92)$$

3-6 الارتباط الذاتي للأخطاء: Autocorrelation of the Errors

لقد ناقشنا مشكلة مخالفة الفرضيتين، الثانية والثالثة، لنموذج الإنحدار الخطي العام في الفقرات السابقة. وقلنا هناك حالتان لهذه الظاهرة والمتمثلة في الفرضية

$$E(UU') = \sigma_u^2 \psi$$

حيث تحدثنا عن الحالة الأولى والمعروفة بظاهرة عدم تجانس تباينات الأخطاء. أما الثانية والمعروفة بمشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء فهي على الشكل:

$$E(UU') = \sigma_u^2 \psi = \begin{cases} E(u_i^2) = \sigma_u^2 \\ E(u_i u_j) \neq 0 & i \neq j \end{cases}$$

وقلنا بأن ذلك يعني أن المصفوفة ψ هي مصفوفة غير قطرية، ولكن عناصر قطرها متساوية حيث يوجد ارتباط ذاتي للأخطاء. وسنأخذ نظام المرتبة الأولى للارتباط الذاتي للأخطاء $AR(1)$ كمثال في تحاليلنا القادمة، ثم نعمم الفكرة إلى مراتب أكثر من الارتباط الذاتي مثل $AR(p)$ ، حيث $p \geq 2$ ، ونأخذ كذلك نظام المتوسطات المتحركة $MA(q)$ Moving Averages حيث $q \geq 1$.

إن هدفنا الأول هنا، هو دراسة مصداقية فرضية عدم الارتباط الذاتي للأخطاء، لإختبار نتائج مخالفتها على خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية. ولكن نظور طرقاً أخرى للتقدير (مثل المربعات الصغرى المعممة)، إذا تطلب منا

ذلك. على العموم، تخالف الفرضية الثالثة للنموذج الكلاسيكي عند استعمال بيانات السلاسل الزمنية. فإذا كانت فرضية عدم الارتباط الذاتي للأخطاء غير محققة، معناه أن قيمة المتغير العشوائي u_i في أية فترة معينة تكون مرتبطة مع قيمة أو قيم نفس المتغير العشوائي السابقة. سنغير رقم المشاهدة (i) إلى $t-1$ ، t ، وهكذا... وهذا نظرا للإعتماد الزمني للمتغيرات العشوائية u على بعضها البعض. حيث نكتب u_t بالنسبة للفترة t و u_{t-1} بالنسبة للفترة $t-1$ وهكذا.

إن الارتباط الذاتي هو حالة خاصة للارتباط على العموم. حيث أن هذا الأخير يشير إلى العلاقة الموجودة بين القيم المتتالية لنفس المتغير وليس للعلاقة بين متغيرين مختلفين أو أكثر. إذن إذا كانت الأخطاء مرتبطة ذاتيا تصبح لدينا:

$$E(u_t u_{t-s}) \neq 0: \quad t \neq s, \quad t, s = 1, 2, \dots$$

إن هذه العبارة معناها أن الأخطاء الظاهرة في الوقت (t) مرتبطة مع الأخطاء الظاهرة في الوقت ($t-s$). إن أغلبية الأعمال التي ظهرت في القياس الإقتصادي حول هذا الموضوع هي الفرضية التالية:

$$\text{cov}(u_t, u_{t-s}) = E(u_t u_{t-s}) = \phi^s \sigma_u^2: \quad s < t$$

حيث أن ϕ هي معلمة محصورة ما بين $(+1)$ و (-1) أي $|\phi| \leq 1$. أما σ_u^2 فهي تباين الأخطاء u_t . ومنه يمكن إقتراح التباينات المشتركة المتتالية للأخطاء على الشكل:

$$\text{cov}(u_t, u_{t-1}) = \phi \sigma_u^2$$

$$\text{cov}(u_t, u_{t-2}) = \phi^2 \sigma_u^2$$

$$\text{cov}(u_t, u_{t-3}) = \phi^3 \sigma_u^2$$

⋮

$$\text{cov}(u_t, u_1) = \phi^{t-1} \sigma_u^2$$

ومنه نعم القانون على الشكل:

$$\text{cov}(u_{t-i}, u_{t-j}) = \phi^{|i-j|} \cdot \sigma_u^2 \quad i \neq j$$

إذا كانت قيمة ϕ تنتمي للمجال $[0,1]$ ، يكون ϕ^2 أقل من ϕ و ϕ^3 من ϕ^2 وهكذا. إن هذا معناه كلما كبر عدد الفترات ما بين خطأين، كلما حصنا على تباينات مشاركة صغيرة. أما إذا كانت $\phi = 0$ فإن كل التباينات المشتركة تكون معدومة، وتصبح فرضية عدم الارتباط الذاتي للأخطاء محققة. أما إذا كانت ϕ تنتمي للمجال $[-1,0]$ ، فإن قيم ϕ ، ϕ^2 ، ϕ^3 ، ...، تنقص بالقيم المطلقة، ولكن تختلف في الإشارة، وهو ما يشكل تذبذبا في الإشارة.

هناك عدة مصادر للارتباط الذاتي. فأولا، نعرف بأن أحد الأسباب الرئيسية لإدخال الخطأ العشوائي في المعادلة المقدرة هو لتمثيل (أو تعويض) أكثر المتغيرات المحذوفة من النموذج (11). وكما هو معروف فإن أغلب المتغيرات الاقتصادية للسلاسل الزمنية تكون مرتبطة ذاتيا فيما بينها. فإذا حذفنا متغيرا مرتبطا ذاتيا مع متغيرات أخرى في النموذج (لسبب ما) من مجموعة المتغيرات المستقلة، فإن هذا الأثر ينتقل إلى المتغير العشوائي u_t ، والذي تصبح قيمته مرتبطة ذاتيا. أما إذا حذفنا كل المتغيرات المستقلة، والمرتبطة ذاتيا فيما بينها، من النموذج فإن الأخطاء u_t يمكن ألا تكون مرتبطة ذاتيا. كما تظهر هذه الظاهرة بسبب التحويلات المطبقة على المعادلة المدروسة عند اشتقاق شكلها المقدر. وهو ما يعرف بالصياغة الرياضية الخاطئة للنموذج. حيث إذا وضعنا شكلا رياضيا يختلف عن شكل العلاقة الرياضية الصحيحة للنموذج، فإن الأخطاء يمكن أن تظهر ارتباطا زمنيا فيما بينها. كما يمكن للارتباط الذاتي أن يظهر مع البيانات المعدلة (مثل التعديل الموسمي أو الشهري) بطرق المتوسطات المتحركة $MA(\cdot)$ Moving Averages. حيث أن أغلب بيانات السلاسل الزمنية تحتوي على بعض التحريفات و تسويات للمعالجة.

يمكن تمثيل الارتباط الذاتي للأخطاء في عدة أشكال، منها نظام المرتبة الأولى للارتباط الذاتي $AR(1)$ First Order Autoregressive، وبدرجة أعلى مثل $AR(P)$ أي:

11- أنظر الفصل الأول عند الحديث عن نموذج القياس الإقتصادي، وكذلك الفصل الرابع الفقرة السادسة والخاصة بمشكلة التعدد الخطي.

$$AR(1): u_t = \phi u_{t-1} + V_t$$

$$AR(2): u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + V_t$$

$$AR(P): u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \dots + \phi_P u_{t-P} + V_t$$

ويمكن لارتباط الأخطاء أن يكون في شكل متوسطات متحركة على الشكل:

$$MA(1): u_t = V_t - \theta V_{t-1}$$

$$MA(2): u_t = V_t - \theta_1 V_{t-1} - \theta_2 V_{t-2}$$

$$MA(q): u_t = V_t - \theta_1 V_{t-1} - \theta_2 V_{t-2} - \dots - \theta_q V_{t-q}$$

أما نظام الارتباط المختلط للأخطاء مع الارتباط الذاتي والمتوسطات

المتحركة من النوع $ARMA(p, q)$ فيكتب على الشكل:

$$ARMA(p, q):$$

$$u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \dots + \phi_p u_{t-p} = V_t - \theta_1 V_{t-1} - \theta_2 V_{t-2} - \dots - \theta_q V_{t-q}$$

ولنأخذ نظام المرتبة الأولى $AR(1)$ كمثال حيث إذا اعتبرنا الأخطاء

العشوائية تخضع لنظام $AR(1)$ تكون على الشكل:

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t: |\phi| < 1, \dots (6.93)$$

مع العلم أن u_t هو حد عشوائي وله الفرضيات التالية:

$$E(V_t) = 0, \quad E(V_t^2) = \sigma_v^2,$$

$$E(V_i V_s) = 0, \quad E(u_{i-s}, V_i) = 0: s > 0,$$

$$E(V_i) = E(V_{i-s}) = E(u_{i-s}),$$

$$E(u_i^2) = E(u_{i-s}^2) = \sigma_u^2$$

ويكون الشكل العام للارتباط الذاتي كما يلي:

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t$$

$$u_{t-1} = \phi u_{t-2} + V_{t-1}$$

⋮

$$u_{t-s} = \phi u_{t-s-1} + V_{t-s}$$

وإذا أردنا تعميم هذه الأخطاء، نبدأ من العلاقة الأولى بالمعادلة (93.6)،
في الفترة t . ثم نكون تعويضات متوالية لقيم u المتأخرة **Lagged Values** كما يلي:

$$\begin{aligned} u_t &= \phi[\phi u_{t-2} + V_{t-1}] + V_t \\ &= \phi^2[\phi u_{t-3} + V_{t-2}] + \phi V_{t-1} + V_t \\ &= \phi^3[\phi u_{t-4} + V_{t-3}] + \phi^2 V_{t-2} + \phi V_{t-1} + V_t \end{aligned}$$

⋮

$$u_t = \phi^s u_{t-(s+1)} + \phi^s V_{t-s} + \dots + \phi^2 V_{t-2} + \phi V_{t-1} + V_t$$

لكن لما تكون s كبيرة ($s \rightarrow \infty$) فإن $\phi^s \rightarrow 0$ (باعتبار أن $|\phi| < 1$)،

ومنه فإن الحد الأول للعبارة أعلاه يقترب من الصفر ويبقى المقدار:

$$\begin{aligned} u_t &= V_t + \phi V_{t-1} + \phi^2 V_{t-2} + \dots + \phi^s V_{t-s} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s V_{t-s} \dots (6.94) \end{aligned}$$

وتكون الأخطاء u_t بالمعادلة (94.6) ممثلة بالمتوسطات المتحركة MA .

ومنه نلاحظ أن u_{t-1} تعتمد على V_{t-1} ، V_{t-2} ، ...، وبالتالي فإن V_t مستقلة عن u_{t-1} ، وكل قيم u السابقة. فإذا أخذنا الوسط لقيم u_t المرتبطة ذاتياً نجد:

$$\begin{aligned} E(u_t) &= E\left(\sum_{s=0}^{\infty} \phi^s V_{t-s}\right) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s E(V_{t-s}) = 0 \end{aligned}$$

أما التباينات فهي على الشكل:

$$\begin{aligned} \text{var}(u_t) &= E(u_t^2) = E\left(\sum_{s=0}^{\infty} \phi^s V_{t-s}\right)^2 \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi^{2s} \text{var}(V_{t-s}) = \sum_{s=0}^{\infty} \phi^{2s} \cdot \sigma_v^2 \\ &= \sigma_v^2 [1 + \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \dots] \end{aligned}$$

إن العبارة الموجودة ما بين قوسين أعلاه، هي متوالية هندسية لما لانهاية من الحدود. حيث أن حدها الأول هو الواحد، والنسبة المشتركة هي ϕ^2 . ويكون مجموع هذه القيم في ظل الاستقرار [$|\phi| < 1$ أي] هو:

$$(1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots) = \frac{1 \cdot (1 - \phi^{2n})}{1 - \phi^2}$$

لكن لما $n \rightarrow \infty$ (حيث n هنا هي عدد الحدود) فإن $\phi^{2n} \rightarrow 0$ ، ليصبح:

$$\text{var}(u_t) = \sigma_u^2 = \sigma_v^2 (1 - \phi^2)^{-1}$$

$$\text{var}(V_t) = \sigma_v^2 = \sigma_u^2 (1 - \phi^2)$$

أما التباينات المشتركة للأخطاء المرتبطة ذاتيا فهي:

$$\begin{aligned} E(u_t u_{t-1}) &= E(\phi u_{t-1} + V_t) u_{t-1} \\ &= \phi E(u_{t-1}^2) + E(u_{t-1} V_t) \\ &= \phi \sigma_u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(u_t u_{t-2}) &= E(\phi u_{t-1} + V_t) u_{t-2} \\ &= \phi^2 E(u_{t-2}^2) + \phi E(u_{t-2} V_{t-1}) + E(u_{t-2} V_t) \\ &= \phi^2 E(u_{t-2}^2) \\ &= \phi^2 \sigma_u^2 \end{aligned}$$

لنعم ونقول أن:

$$E(u_t u_{t-s}) = \phi^s \sigma_u^2 = \phi^s \sigma_v^2 (1 - \phi^2)^{-1} : s \geq 1$$

ولنعتبر الآن نظام الارتباط الذاتي للأخطاء من المرتبة الثانية (AR(2):

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + V_t \dots (6.95)$$

حيث لدينا كذلك:

$$E(u_t u_{t-k}) = 0 : k \geq 1$$

ومنه نجد:

$$E(u_t u_{t-k}) = \phi_1 E(u_{t-1} u_{t-k}) + \phi_2 E(u_{t-2} u_{t-k})$$

وإذا كتبنا العبارة:

$$E(u_t u_{t-k}) = \sigma_u^2 P_k$$

فإنه ينتج:

$$\sigma_u^2 P_k = \sigma_u^2 \phi_1 P_{k-1} + \sigma_u^2 \phi_2 P_{k-2}$$

وبالتقسيم على σ_u^2 نجد:

$$P_k = \phi_1 P_{k-1} + \phi_2 P_{k-2}$$

ومنه نقول من أجل $k = 1$ نجد:

$$P_1 = \phi_1 P_0 + \phi_2 P_1$$

وإذا كان نظام AR(2) مستقرا⁽¹²⁾ فإن $P_0 = P_1 = P_{-1}$ ليصبح لدينا:

$$P_1 = \phi_1 (1 - \phi_2)^{-1}$$

أما لما $k = 2$ ، فإن $P_2 = \phi_1 P_1 + \phi_2 P_0$ لنجد:

$$P_2 = \phi_1^2 (1 - \phi_2)^{-1} + \phi_2$$

حيث أن $P_0 = P^0 = 1$ ، وكذلك $P_k = P \cdot P_{k-1} = P^k$

وبالتعويض المتتالي في العبارة العامة نجد P_k (حيث $k = 1, 2, \dots$)،

وللحصول على تباين المعادلة (95.6)، ندخل التوقع لنجد:

$$\sigma_u^2 [1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - 2\phi_1\phi_2 P_1] = \sigma_v^2$$

وبالتعويض عن: $P_1 = \phi_1 (1 - \phi_2)^{-1}$ والتبسيط نجد:

$$\sigma_u^2 = \frac{(1 - \phi_2) \sigma_v^2}{(1 + \phi_2) [(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2]}$$

ولنعتبر الآن نظام المرتبة الأولى من المتوسطات المتحركة MA(1) على الشكل:

$$u_t = V_t - \theta_1 V_{t-1} \dots \dots \dots (6.96)$$

لنجد أن:

$$\begin{aligned} E(u_t u_{t-1}) &= E[V_t - \theta_1 V_{t-1}][V_{t-1} - \theta_1 V_{t-2}] \\ &= -\theta_1 E(V_{t-1}^2) = -\theta_1 \sigma_v^2 \end{aligned}$$

¹² - إن شرط الاستقرار يضمن أن دالة الارتباط الذاتي تتخفض كلما ارتفع k . وفي مثالنا أعلاه تكون شروط الاستقرار هي: $1 < \phi_2 - \phi_1$ ، $1 < \phi_2 + \phi_1$ ، $1 < |\phi_2|$. وسنوضح ذلك بطريقة أكثر بالفصل الثامن لاحقا.

ولدينا كذلك:

$$E(u_t^2) = E[V_t - \theta_1 V_{t-1}]^2 \\ = (1 + \theta_1^2) \sigma_v^2$$

وبفرض حالة الاستقرار نجد:

$$P_1 = -\theta_1 (1 + \theta_1^2)^{-1}$$

أما بقية معالم الارتباط الذاتي فتساوي الصفر: فمثلا:

$$E(u_t u_{t-2}) = E[(V_t - \theta_1 V_{t-1})(V_{t-2} - \theta_1 V_{t-3})] \\ = \theta_1^2 E(V_{t-1} V_{t-3}) = 0$$

وعلى العموم من أجل $MA(q)$ تكون:

$$E(u_t u_{t-k}) = E[(V_t - \theta_1 V_{t-1} - \dots - \theta_q V_{t-q})(V_{t-k} - \theta_1 V_{t-k-1} - \dots - \theta_q V_{t-k-q})]$$

ومن أجل $k > q$ لا توجد حدود لـ U مشتركة مع العبارة أعلاه. ومنه يكون

$$p_k = 0 : k > q$$

تعود الآن إلى مصفوفة التباين -التباين المشترك للأخطاء حيث أن:

$$E(UU') = \sigma_u^2 \psi$$

وبالنسبة لنظام المرتبة الأولى للارتباط الذاتي $AR(1)$ مع النموذج الخطي العام،

نكتب هذه المصفوفة على الشكل:

$$\text{var}(U) = E(UU')$$

$$= \sigma_u^2 \psi = \begin{bmatrix} E(U_1^2) & E(U_1 U_2) & \dots & E(U_1 U_n) \\ E(U_2 U_1) & E(U_2^2) & \dots & E(U_2 U_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(U_n U_1) & E(U_n U_2) & \dots & E(U_n^2) \end{bmatrix}$$

وبمعرفه $E(u_t u_{t-s}) = \phi^s \sigma_u^2$ ، $E(u_t^2) = \sigma_u^2$ نجد:

$$\text{var}(u) = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & & \phi & 1 \end{bmatrix} = \sigma_u^2 \psi \dots (6.97)$$

إن تقدير $\text{var}(u)$ من المعادلة (97.6) في العينات يكون مستحيلا، مادام عدد المجاهيل يفوق عدد الملاحظات. وأبسط طريقة لإجراء التقدير هي ضمان تخفيض عدد المعالم المجهولة بواسطة بعض البناء المناسب للأخطاء. إن ψ في المعادلة (97.6) أعلاه، هي مصفوفة مربعة $n \times n$ ومحددة موجبة. بحيث نبحث عن مصفوفة غير شاذة P والتي تحقق الشرط:

$$P'P = \psi^{-1}$$

$$P\psi P' = I_N$$

إن مقلوب المصفوفة ψ بالمعادلة (97.6) هو:

$$\psi^{-1} = (1 - \phi^2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & 1 + \phi^2 & -\phi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & -\phi \\ 0 & 0 & & -\phi & 1 \end{bmatrix} \dots (6.98)$$

ومنه للتخلص من ظاهرة الارتباط الذاتي للأخطاء نضرب النموذج الأصلي

بالمصفوفة P المعرفة كما يلي:

$$P = \begin{bmatrix} (1 - \phi^2)^{1/2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\phi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -\phi & 1 \end{bmatrix} \dots (6.99)$$

ويصبح النموذج المحول على الشكل:

$$PY = PX\beta + PU$$

وتكون ملاحظات المتغيرات على النحو:

$$PY = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\phi^2} Y_1 \\ Y_2 - \phi Y_1 \\ \vdots \\ Y_n - \phi Y_{n-1} \end{bmatrix}, \quad PU = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\phi^2} U_1 \\ U_2 - \phi U_1 \\ \vdots \\ U_n - \phi U_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$PX = \begin{bmatrix} (1-\phi^2)^{1/2} & (1-\phi^2)^{1/2} X_{21} & \dots & \dots & (1-\phi^2)^{1/2} X_{k1} \\ (1-\phi) & X_{22} - \phi X_{21} & \dots & \dots & X_{k2} - \phi X_{k1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ (1-\phi) & X_{2n} - \phi X_{2,n-1} & \dots & \dots & X_{kn} - \phi X_{k,n-1} \end{bmatrix}$$

وبتطبيق قانون المربعات الصغرى على النموذج المحول نحصل على مقدار المربعات الصغرى المعجمة والمعرف بالمعادلة (9.6) سابقا. ثم من آثار الارتباط الذاتي AR(1) على مقدرات المربعات الصغرى العادية نلاحظ التباين على الشكل:

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X' \psi X (X'X)^{-1}$$

وبأخذ النموذج البسيط $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ مع نظام AR(1)، وتعويض عبارة التباين أعلاه بالمعادلة (9.6) من أجل ψ نجد:

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2}{\sum X_t^2} \left[1 + \frac{2\phi \sum_{t=1}^{n-1} X_t X_{t+1}}{\sum_{t=1}^n X_t^2} + \frac{2\phi^2 \sum_{t=1}^{n-2} X_t X_{t+2}}{\sum_{t=1}^n X_t^2} + \dots + \frac{2\phi^{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} X_t X_n}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \right] \dots (6.100)$$

أما التباين الموجود بالمعادلة (12.6) فتعويضه بحالة النموذج البسيط يعطي:

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_t^2} \left[\frac{1 - \phi^2}{1 + \phi^2 - 2\phi \sum_{t=1}^{n-1} x_t x_{t+1} / \sum x_t^2} \right] \dots (6.101)$$

كما أن تباين المتغير العشوائي u_t يمكن أن يعطي مقدرا ناقصا. حيث أن:

$$E(\sum \hat{U}_t^2) = \sigma_u^2 \left[(n-2) - \frac{2 \sum x_t x_{t+1} \phi}{(\sum x_t^2)^2} \right] \dots (6.102)$$

فإذا كان u_t و x_t مرتبطين ذاتيا بالإيجاب، تعطي المربعات الصغرى العادية للقانون $\sum \hat{U}_t^2 / (n-2)$ مقدرا ناقصا لـ σ_u^2 لأن الحد الثاني للمعادلة (102.6) أعلاه يختلف عن الصفر وموجب. وعلى العموم، نقول إذا واجهتنا مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء من المرتبة الأولى، فإن النتيجة هي فقدان خاصية الكفاءة لمقدر المربعات الصغرى العادية. وتصبح قيم النتائج الإحصائية المطبقة (مثل F, t, R^2, \dots) مضخمة. ويكون الحل لهذه المشاكل هو إستعمال طريقة المعقولية العظمى، أو طريقة المربعات الصغرى المعممة، أو طرقا تفصيلية أخرى سيأتي ذكرها فيما بعد عند الحاجة.

1-3-6 إختبارات الارتباط الذاتي:

إن إكتشاف الارتباط الذاتي للأخطاء يكون بواسطة رسم بواقي الإنحدار عند قيمها المتأخرة أو ضد الزمن. ومن أهم هذه الإختبارات الخاصة بنظام المرتبة الأولى للارتباط الذاتي هو إختبار الباحثين Durbin-Watson 1949. فإذا كان لدينا النموذج الخطي العام مع نظام $AR(1)$ ، تكون الفرضية المختبرة على الشكل التالي:

$$H_0: \phi = 0$$

$$H_A: \phi \neq 0$$

لكننا نعرف بأن الأخطاء u_t غير ملاحظة، حيث لدينا البواقي: $\hat{U} = MU$ مع

$$E(\hat{U}\hat{U}') = \sigma_u^2 M$$

ومنه فإن بواقي المربعات الصغرى العادية سوف تحتوي على بعض الارتباط الذاتي في العناصر الموجودة خارج قطر المصفوفة M والتي لا تفضل كما أن M هي دالة لقيم العينة في المتغيرات المستقبلية. وبالتالي من المستحيل اشتقاق اختبار عينة نهائية دقيقا للبواقي \hat{U} .

1-1-3-6 اختبار داربين واتسون (D-W)

يصلح هذا الاختبار لنظام المرتبة الأولى من الارتباط الذاتي للأخطاء، ولكنه بالرغم من اشتقاقه على أساس حجم العينة الكبيرة، فإنه ينطبق على العينات الصغيرة الحجم. ولإجراء اختبار الفرضية H_0 نكتب القيمة الإحصائية لداربين وواتسون d على الشكل:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{U}_t - \hat{U}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{U}_t^2}$$

$$= \frac{\hat{U}'A\hat{U}}{\hat{U}'\hat{U}} = \frac{U'M'AMU}{U'MU} \dots (6.103)$$

كما أن المصفوفة A معرفة لدى (D-W) في بحثهما بمجلة

ECONOMETRICA 1949 كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتعريف لدينا:

$$d = \frac{U'M'AMU}{U'MU} = \frac{Z'DZ}{Z'MZ}$$

لكن الصيغة التربيعية $Z'DZ$ غير مستقلة عن الصيغة التربيعية

$Z'MZ$ لأن $DM = M'AM.M = M'AM \neq 0$. إذن لا يمكن إجراء اختبار التوزيع F أو مايشابه ذلك.

ونكتب القيمة التقريبية للأحصاءة d على الشكل:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{U}_t^2 + \sum_{t=2}^n \hat{U}_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^n \hat{U}_t \hat{U}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \hat{U}_t^2}$$

ومادام $\sum \hat{U}_t^2$ و $\sum \hat{U}_{t-1}^2$ متساويين تقريبا بالنسبة للعينات الكبيرة نجد:

$$d \approx 2(1 - \hat{\phi}) \dots (6.104)$$

حيث أن:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum \hat{U}_t \hat{U}_{t-1}}{\sum \hat{U}_t^2}$$

ومن المعادلة (104.6) نقول أن قيم d محصورة ما بين الصفر وأربعة من أجل $-1 \leq \phi \leq 1$ أي أن $0 \leq d \leq 4$. أما لما $\phi = 0$ فإن $d = 2$. ولهذا فاختبار $\phi = 0$ هو مكافئ لاختبار $H_0: d = 2$. ومنه نقول إذا كانت d قريبة من الصفر أو من أربعة فإن الأخطاء تكون مرتبطة بشكل عالي.

إن المشكل مع هذا الاختبار هو أننا لا نعرف التوزيع الصحيح للإحصاءة d . لأن توزيع المعاينة لـ d يعتمد على قيم المتغيرات المستقلة، ومنه فإن داربين-واتسون إشتقا النهايات العليا (Upper Bound) (d_u) والنهايات الدنيا Lower Bound (d_L) من مستويات المعنوية لـ d . لأن القيم الحرجة الدقيقة

للإحصاءة d لا يمكن جدولتها بالنسبة لكل الحالات الممكنة. إن الحدود المجدولة من طرف الباحثين (D-W) تختبر الفرضية $\phi = 0$ ضد الفرضية البديلة $\phi > 0$. ويكون الاختبار على الشكل التالي:

1- إذا كانت $d < d_L$ يوجد ارتباط ذاتي موجب $\phi > 0$.

2- إذا كانت $d > d_U$ لا يوجد ارتباط ذاتي $\phi = 0$.

3- إذا كانت $d_L < d < d_U$ يكون الاختبار غير حاسم.

ويجب الملاحظة بأن اختبار (D-W) يشترط أن تكون قيم المصفوفة X غير عشوائية. كما أنه من الضروري إدخال الحد الثابت في الإنحدار. ومنه فإن هذا الاختبار لا يصلح للنماذج المحتوية على متغيرات متأخرة. كما أن مجال عدم الحسم يعتبر مشكلا وخاصة عند درجات الحرية الكبيرة والصغيرة.

ويبين Hanman-Terrell 1966 بأن الحد الأعلى Upper Bound لإحصاءة (D-W) هي تقريب جيد لتوزيعه لما تتغير المحددات ببطء. ورغم أننا كتبنا $d = 2(1 - \hat{\phi})$ ، فإن هذا التقريب صحيح فقط في العينات الكبيرة. إن وسط الإحصاءة d لما $\phi = 0$ يعطي بالعلاقة:

$$E(d)^{(13)} = 2 + \frac{2(k-1)}{n-k}$$

حيث أن k هي عدد المعالم المقدرة في الإنحدار (بما فيها الحد الثابت)، و n حجم العينة. ومنه نقول حتى لما تكون $\phi = 0$ ، فإن الإحصاءة تكون متحيزة وأكثر من 2. حيث إذا كان $k = 5$ ، $n = 15$ فإن:

$$E(d) \approx 2.8$$

ويكون التحيز هو 0,8 لكن لما $k = 5$ ، $n = 105$ مثلا فإن:

$$E(d) = 2.08$$

ويقارن اختبار (D-W) الإحصاءة d مع القيمتين الحرجتين d_U و d_L ومع محولاتها كذلك وهي $(4 - d_U)$ و $(4 - d_L)$. إن إستعمال المقارنة d_L و

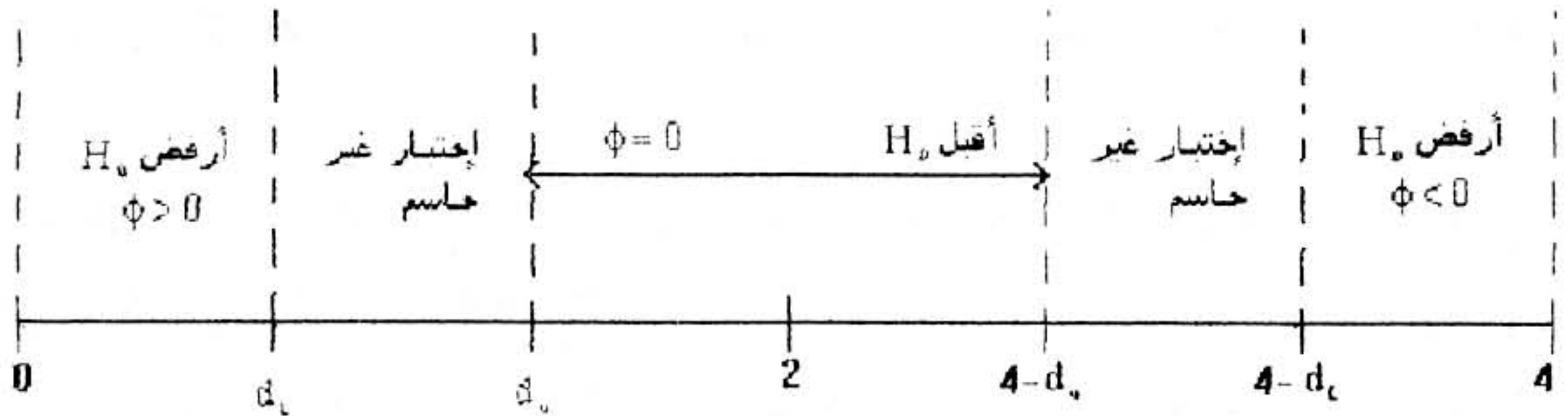
13- أنظر: G.S Maddala 1988- Page 187 (مرجع سابق).

d_u تتأكد من إمكانية وجود ارتباط ذاتي موجب. بينما إستعمال المقارنة $(4 - d_L)$ وكذلك $(4 - d_u)$ تتأكد من وجود ارتباط ذاتي سالب على الشكل:

1- $d > (4 - d_L)$ يوجد ارتباط ذاتي سالب $\phi < 0$.

2- $d_u < d < (4 - d_u)$ فإن $\phi = 0$.

3- $(4 - d_u) < d < (4 - d_L)$ فالإختبار غير حاسم ويمكن توضيح ذلك بالجدول (1.6):



جدول (1.6) - الارتباط الذاتي AR(1) وإختبار (D-W)

وهناك إختباران آخران متشابهان يعتمدان على المرتبة الأولى للارتباط الذاتي، كإختبار نسبة Von-Newman 1941 والمعرف على الشكل:

$$\frac{\delta^2}{S^2} = \frac{\sum_{t=2}^n (V_t - V_{t-1})^2 / (n-1)}{\sum_{t=1}^n (V_t - \bar{V})^2 / n}$$

حيث V_t تمثل البواقي. ويمكن إستعمال نسبة Von-Newman فقط لما تكون V_t مستقلة في ظل H_0 وبتباين متجانس. بينما نلاحظ أن بواقي المربعات الصغرى \hat{U}_t لا تحقق هذه الشروط. وبالتالي لا يمكن إستعمال هذه النسبة مع بواقي المربعات الصغرى لكن خلال السنوات الأخيرة ظهرت عدة بدائل للبواقي المقترحة لنموذج الإنحدار الخطي، حيث أن عددا كبيرا من هذه البواقي، مثل بواقي التراجع Recursive Residuals يحقق شروط الإستقلال والتباين المتجانس. أما الإختبار المشابه الآخر فهو إختبار الباحثين Beremblut-Webb 1973 والمعرف على الشكل:

$$g = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{V}_t^2}{\sum_{t=1}^n \hat{U}_t^2}$$

حيث أن \hat{V}_t هي البواقي المقدرة من إنحدار الفرق الأول لـ Y [أي $Y_t - Y_{t-1}$] في الفرق الأول للمتغيرات المستقلة [أي $X_t - X_{t-1}$] وذلك بدون الحد الثابت، ويكون هذا الاختبار صالحا للتطبيق لما تكون القيمة $|\phi| \geq 1$ ممكنة.

وهناك عدة جداول لإختبار الارتباط، طورت في السنوات الأخيرة من بينها

نذكر:

(a) جداول R.W.Farebrother 1980 في المجلة الدورية ECOMETRICA وتعطي جداول نماذج إنحدار بدون الحد الثابت.

(b) جداول Savin-White 1977، تعطي جداول (D-W) لعينات من 6 إلى 200 ملاحظة و 20 محدر.

(c) جداول Wallis 1972، نماذج إنحدار مع بيانات موسمية AR(4).

(d) جداول King 1981 لبيانات السلاسل الزمنية الموسمية مع اتجاه عام Trend ومتغيرات وهمية موسمية في ظل AR(1).

(e) جداول King 1983 من أجل البيانات الشهرية AR(12).

2-1-3-6 إختبار Wallis:

لاحظ الباحث والأستاذ 1972 K.F Wallis في بحثه بمجلة ECONOMETRICA أن عدة أبحاث تطبيقية تستعمل البيانات الموسمية. ومنه نتوقع إيجاد الدرجة الرابعة من الارتباط الذاتي للأخطاء. ويكون التخصيص على الشكل:

$$u_t = \phi_4 u_{t-4} + v_t$$

أما الفرضية المختبرة فتكون على الشكل $H_0: \phi_4 = 0$. ويقترح Wallis

إختبارا موسعا لإختبار (D-W) على الشكل:

$$d_4(14) = \frac{\sum_{t=5} (\hat{U}_t - \hat{U}_{t-4})^2}{\sum_{t=1} \hat{U}_t^2}$$

ثم اشتق الحدود الدنيا والعليا لـ d_4 تحت X غير عشوائية مع $\lambda = 5\%$.

بعدها اقترح حالة وجود الحد الثابت مع المحدرات (ولكن بمجموعة غير كاملة للمتغيرات الوهمية) وكذلك حالة إحتواء المحدرات على أربعة متغيرات وهمية موسمية. وفي كل حالة كانت القيم الحرجة هي $H_0: \phi_4 = 0$ ضد $H_A: \phi_4 > 0$. أما من أجل $H_A: \phi < 0$ فيقترح Wallis استعمال المقارنة $(4 - d_{4,u})$ و $(4 - d_{4,L})$.

3-1-3-6 إختبارات الارتباط الذاتي لما يحتوي النموذج على متغيرات تابعة ومؤخرة

عند مناقشتنا لإحصاءة داربين-واتسون أعتربنا بأن المتغيرات المفسرة للنموذج غير مرتبطة مع عنصر الأخطاء u_t . أما لما تحتوي هذه المتغيرات المستقلة على متغيرات تابعة ومؤخرة بفترة على الأقل فينتج عن ذلك ارتباط الأخطاء عبر الزمن. ولنعتبر النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_J Y_{t-J} + \beta_{J+1} X_{1t} + \dots + \beta_{J+1} X_{Jt} + u_t \dots (6.104')$$

مع نظام AR(1) على الشكل:

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t$$

$$V_t \sim N(0, \sigma_V^2)$$

$$\left| \sum_{j=1}^J \beta_j \right| < 1, |\phi| < 1 \text{ : شروط الإستقرار هي}$$

¹⁴- أنظر: K.F.Wallis "Testing For Fourth order autocorrelation in Quarterly Regression Equations" ECONOMETRICA July 1972

ونظرا إلى أن u_t تعتمد على u_{t-1} ، و Y_{t-1} تعتمد كذلك على u_{t-1} ، ثم إن u_{t-1} تعتمد بدورها على u_{t-2} ، وكذلك Y_{t-2} تعتمد على u_{t-2} وهكذا إلى أن نصل إلى Y_{t-j} تعتمد على u_{t-j} . إن كل زوج من المتغيرات (u_{t-j}, Y_{t-j}) يكون مرتبطا عبر الزمن، وتكون مقدرات المربعات الصغرى العادية لموجه المعالم $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j)'$ غير متسقة. ويمكن توضيح ذلك بالنسبة لنموذج جزئي من المعادلة (104.6) على النحو:

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t$$

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t$$

ولما يكون $|\beta_1| < 1$ ينتج أن:

$$p \lim(\hat{\beta}_1) = \alpha + A$$

$$p \lim(\hat{\phi}) = \phi - A$$

حيث أن:

$$A = \frac{\phi \text{var}(X_t) \cdot \text{var}(u_t)}{(1 - \phi\beta_1) [\text{var}(Y_{t-1}) \cdot \text{var}(X_t) - \text{cov}^2(Y_{t-1}, X_t)]}$$

ومادامت، حسب (15) Maddala-Rao 1973، القيمة $A > 0$ ، فإن $\phi > 0$ ، وتكون $\hat{\beta}_1$ متحيزة بالزيادة. بينما $\hat{\phi}$ متحيزة بالنقصان. وبالتالي فإن الإحصاءة d لداربين-واتسون تكون متحيزة حول 2، ولانجد أثرا للإرتباط الذاتي رغم إمكانية وجوده بالنموذج. وقد اشتق داربين إختبارا بديلا، والمسمى إختبار "Durbin h" في بحثه سنة 1970 على الشكل:

$$h = \hat{\phi} \sqrt{\frac{n}{1 - n \hat{\text{var}}(\hat{\beta}_1)}} \sim N(0,1)$$

15- أنظر: G.S Maddala and A.S Rao: "Tests for serial correlation in Regression Models with Lagged Dependent Variables and serially correlated Errors" *ECONOMETRICA* Vol 47 July 1973, PP 761-774.

حيث أن h متغير طبيعي معياري، و n عدد الملاحظات. أما $\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_1)$ فهو مقدار تباين العينة لمعلمة المتغير المؤخر Y_{t-1} في إنحدار المربعات الصغرى العادية للمعادلة (104.6) مع العبارة:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2} \hat{U}_t \hat{U}_{t-1}}{\sum_{t=1} \hat{U}_t^2}$$

ويجري هذا الاختبار وفقا للخطوات التالية:

- 1- نطبق قانون المربعات الصغرى على المعادلة (104.6). ثم نحسب $\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_1)$
 - 2- نطبق قانون المربعات الصغرى العادية على نظام AR(1) لنحسب $\hat{\phi}$ ، أو من إحصاءة داربين-واتسون $\hat{\phi} \approx 1 - d/2$. ثم نحسب الإحصاءة h .
- إذا كانت $h > 1.645$ نرفض H_0 عند مستوى معنوية $\lambda = 5\%$ من أجل الارتباط الذاتي الموجب. أما إذا كانت $n \hat{\text{var}}(\hat{\beta}_1) \geq 1$ ، فلا يمكن تطبيق اختبار h Durbin. ومنه، وفي هذه الحالة يقترح Durbin طريقة اختبار بديلة أخرى وهي تقاربية ومتكافئة مع الطريقة السابقة الذكر حيث نحسب البواقي الناتجة من الخطوة الأولى، والمطبقة على المعادلة (104.6). ثم نحدر هذه البواقي \hat{U} في كل من \hat{U}_{t-1} وبقيّة المتغيرات المفسرة للمعادلة (6.104) على النموذج المحوّل التالي:
- $$\hat{U}_t = \alpha \hat{U}_{t-1} + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_j Y_{t-j} + \beta_{j+1} X_{1t} + \dots + \beta_{j+i} X_{it} + V_t$$
- وبتطبيق قانون المربعات الصغرى العادية على الإنحدار الأخير أعلاه، نحصل على $\hat{\alpha}$. فإذا كانت الفرضية $H_0: \alpha = 0$ مرفوضة، نرفض $H_0: \phi = 0$.

4-1-3-6 اختبار Breusch-Goldfrey

يشق هذا الاختبار من أساسيات مضاعافات لاقرانج. ويطلق عليه بعض الكتاب، أمثال (16) K.F.Wallis اسم "اختبار داربين الموسع". حيث أن الطرق المستعملة لحد الآن تختبر المعنوية الفردية لمعامل الارتباط الذاتي. ومنه جاء الاختبار المطور من طرف Breusch-Goldfrey 1978. ولنعبر نموذج الإنحدار

16- (مرجع سابق) K.F.Wallis 1981 "Introductory Econometrics"

الخطي العام:

$$Y = X\beta + U$$

مع نظام AR(P) على الشكل:

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \dots + \phi_P u_{t-P} + V_t \dots (6.105)$$

$$V_t \sim IN(0, \sigma_V^2)$$

ونكون مهتمين باختبار الفرضية:

$$H_0: \phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_P = 0$$

إن المتغيرات X في النموذج الخطي العام أعلاه، يمكن أن تحتوي على متغيرات تابعة مؤخرة من المعادلة (6.104). ويكون الاختبار وفقا للخطوات التالية:

1- قدر المعادلة الخاصة بالنموذج الخطي العام بواسطة المربعات الصغرى العادية لنحصل على البواقي \hat{U} .

2- قدر المعادلة الجديدة التالية:

$$\hat{U} = X\beta + E\phi + \varepsilon \dots (6.106)$$

حيث أن:

$$\phi' = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_P]$$

$$E = [\hat{U}_{t-1} \quad \hat{U}_{t-2} \quad \dots \quad \hat{U}_{t-P}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hat{U}_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hat{U}_2 & \hat{U}_1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \hat{U}_2 & \hat{U}_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ \hat{U}_{n-1} & \hat{U}_{n-2} & \dots & \dots & \hat{U}_1 & \hat{U}_{n-P} \end{bmatrix}$$

3- نكون الاختبار الإحصائي التالي:

$$LM = \hat{U}'E[E'E - E'X(X'X)^{-1}X'E]^{-1}E'\hat{U} / \hat{\sigma}_n^2 \sim \chi_P^2 \dots (6.107)$$

حيث أن:

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \hat{U}'\hat{U}/n$$

ونشير إلى أن هذا الإختبار يصلح كذلك لنظام المتوسطات المتحركة $MA(q)$. حيث إذا كانت قيمة LM أعلاه كبيرة سوف تؤدي إلى رفض H_0 . أما إذا كانت مصفوفة المعادلة (106.6) تحتوي على متغيرات خارجية فقط (بدون متغيرات تابعة مؤخرة) فإن الإختبار أعلاه يختصر إلى الشكل:

$$LM = n \sum_{j=1}^P \hat{\phi}_j^2$$

حيث أن:

$$\hat{\phi}_j = \frac{\sum_{t=j+1}^n \hat{U}_t \hat{U}_{t-j}}{\sum_{t=1}^n \hat{U}_t^2}, \quad J = 1, 2, \dots$$

كما أنه من المعادلة (106.6) يمكن إختبار الفرضية المجمعة:

$$H_0: \phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_P = 0$$

لنكون الإحصاءة F (التوزيع F)، ثم نكون الإختبار التالي:

$$P.F \sim \chi_P^2$$

ومنه إذا كانت $P.F > \chi_P^2$ عند مستوى $\lambda\%$ ، نرفض H_0 ، ونقر بوجود الارتباط الذاتي للأخطاء.

وهناك طريقة أخرى مماثلة لهذا الإختبار، حيث إذا طبقنا المربعات الصغرى العادية على المعادلة (106.6)، وحسبنا معامل التحديد R^2 ، يمكن لنا كتابة إختبار المعادلة (107.6) على الشكل الجديد:

$$LM = n.R^2 \sim \chi_P^2$$

فمثلا من نظام الارتباط الذاتي المقترح من طرف Wallis 1972، $AR(4)$ يكون:

$$\hat{U}_t = \phi_4 u_{t-4} + V_t$$

فنختصر المعادلة (106.6) إلى الشكل:

$$\hat{U}_t = \sum_{j=1}^k \beta_j X_{jt} + \phi_4 \hat{u}_{t-4} + \varepsilon_t$$

ومنه نختبر الفرضية $\phi_4 = 0$.

مثال (4.6):

لنعتبر النموذج الخطي العام مع إمكانية وجود ارتباط ذاتي للأخطاء من المرتبة الرابعة أي:

$$U_t = \phi_1 u_{t-1} + \dots + \phi_4 u_{t-4} + V_t$$

$$V_t \sim \text{IN}(0, \sigma_v^2)$$

ومنه نقدر النموذج الخطي العام بطريقة المربعات الصغرى العادية، لنحتفظ بالبواقي. ثم نعلم هذه البواقي إلى المرتبة الرابعة $(\hat{U}_{t-1}, \hat{U}_{t-2}, \hat{U}_{t-3}, \hat{U}_{t-4})$. لتكن X هي مصفوفة المحدثات من النموذج الأصلي، وكذلك $\hat{U} = Y - X\hat{\beta}$. لتحاكي سقوط الملاحظات بسبب تأخير البواقي لأربعة فترات، فإننا نعوض الملاحظات الناقصة لموجه البواقي E بأصفار مكان العناصر الأولى لهذا الموجه أي أن:

$$E = \begin{bmatrix} \hat{U}_{t-1} & \hat{U}_{t-2} & \hat{U}_{t-3} & \hat{U}_{t-4} \\ \hat{U}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{U}_2 & \hat{U}_1 & 0 & 0 \\ \hat{U}_3 & \hat{U}_2 & \hat{U}_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \hat{U}_{n-1} & \hat{U}_{n-2} & \hat{U}_{n-3} & \hat{U}_{n-4} \end{bmatrix}$$

ثم نحدر موجه بواقي المربعات الصغرى العادية \hat{U} في $[X \ E]$ على الشكل:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= [X \ E] \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \varepsilon \\ &= X\beta + E\gamma + \varepsilon \dots (6.108) \end{aligned}$$

حيث أن:

$$\gamma' = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4]$$

ولنجري تقدير المعادلة (108.6) بواسطة المربعات الصغرى العادية. ثم

نأخذ معامل التحديد المضاعف R^2 من مقدار المعادلة (108.6) على الشكل:

$$R^2 = 1 - (RSS/TSS)$$

بعدها نكون الإختبار الإحصائي الذي يختبر الفرضية

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0 \text{ على الشكل:}$$

$$LM = n \cdot R^2 \sim \chi_4^2.$$

إذا كانت $n \cdot R^2$ أكبر من القيمة الحرجة لـ χ_4^2 بمستوى 5% نرفض

فرضية العدم أعلاه.

2-3-6 بعض الإضافات حول إختبار (D-W)

ذكرنا، عند مناقشتنا لإختبار (D-W)، بأن هذا النوع من الإختبار موجه

لإختبار الفرضية $\phi = 0$ إذا كانت الأخطاء تتبع نظام المرتبة الأولى من الارتباط

الذاتي (AR(1)، لكن عبر الدراسات المتوالية، والتي جاءت بعد نشر نتائج (D-W)،

بعد الخمسينات، أثبت بأن هذا الإختبار قوي ويصلح لإختبار فرضيات بديلة أخرى

مثل (AR(2)، MA(1)، ARMA(1,1)، وغيرها. ولهذا يمكن القول بأن المعنوية

الإحصائية الإيجابية لإحصاءة (D-W) قد تكون كمؤشر للارتباط الذاتي عبر الزمن،

ليس فقط بسبب نظام أخطاء من النوع (AR(1)، بل يمكن أن يكون بسبب حذف

متغيرات مهمة وأساسية من النموذج. وأخيرا إن الصياغة الرياضية الخاطئة

للمodel أو مايسمى "بخطأ التخصيص الديناميكي" Misspecified Dynamics قد

تسبب في ظهور الارتباط عبر الزمن للأخطاء Serrial Correlation. وسنوضح

هذه النقاط في ثلاثة حالات ممكنة.

1-2-3-6 الارتباط الذاتي للأخطاء ليس من النوع AR(1):

إذن، مثلما أشرنا أعلاه، فإن المعنوية الإيجابية للإحصاءة (D-W) ليس معناه أن الأخطاء تكون دائما من النوع AR(1). حيث يجب أن نتأكد من الإنحدارات الذاتية ذات المرتبة الأعلى مثل (AR(2), AR(3)...) بواسطة تقدير المعادلات من الشكل:

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + V_t$$

ولما نحدد المرتبة التي ينتمي إليها نظام الارتباط الذاتي للأخطاء AR(.), يمكن تقدير النموذج (بواسطة التقنيات التي سوف نتطرق إليها لاحقا)، وهناك طريقتان لتحديد نظام المرتبة المناسبة للإنحدار الذاتي. تهتم الأولى باختبار النموذج تدريجيا من AR(1) ثم AR(2) وهكذا إلى أن نقبل H_0 من أجل إنحدار ذاتي من مرتبة AR(P) حيث $P > 2$. أما الطريقة الثانية فتبدأ من إنحدار ذاتي من مرتبة أعلى، ثم نبسطها بشكل تدريجي (بعد اختبار معنوية المعالم ϕ_j في كل خطوة) إلى أبسط إنحدار ذاتي ممكن ومقبول إحصائيا. ورغم أن الطريقة الأولى هي المستعملة دائما، إلا أن الطريقة الثانية تعتبر الأحسن من الوجهة النظرية.

2-2-3-6 الارتباط الذاتي بسبب حذف متغيرات

إن الارتباط الذاتي الناتج عن حذف متغيرات مهمة (أو المرتبطة فيما بينها) صعب الإكتشاف. حيث أن مصدر الارتباط من هذا النوع يجعل الأثر ينتقل مباشرة إلى عنصر الخطأ مثل حالة التعدد الخطي. لنفرض أن المعادلة الحقيقية هي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Z_t + u_t$$

حيث أن Y_t هي الاستهلاك الفردي، X_t الدخل الفردي، Z_t دخل العائلة التي ينتمي إليها الفرد، t الزمن.

بينما نقوم نحن بتقدير المعادلة

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \varepsilon_t$$

ومادام $\varepsilon_t = \beta_3 Z_t + u_t$ ، فإن ε_t تكون مرتبطة ذاتيا. ومنه تصبح ε_t غير مستقلة عن X_t . وبالتالي فإن مقدرات المربعات الصغرى للمعلمتين (β_1, β_2) تكون غير كفوءة وغير متسقة. أما إذا كانت X_t و Z_t مستقلتين، فإنه يمكن تقدير المعادلة أعلاه بدون أي مشكل يذكر. ومنه لكي نستطيع تطبيق طرق التقدير الممكنة والمعروفة، يجب أن نبين بأن المتغيرات المحذوفة والمرتبطة ذاتيا (والتي أنتجت الارتباط الذاتي للأخطاء) تعتبر غير مرتبطة مع المتغيرات المستقلة المدخلة (المضافة للنموذج). فإذا كانت هذه المتغيرات المحذوفة تحتوي على متغير الاتجاه العام، وينتج عن ذلك الارتباط الذاتي للأخطاء من جهة، ومشاكل عدم تجانس تباينات الأخطاء من جهة أخرى نقول أننا مع حالة نماذج الارتباط الذاتي المشروطة بعدم تجانس تباينات الأخطاء Autoregressive-Conditionnal Heteroskedastic Models (ARCH).

3-2-3-6 الارتباط عبر الزمن بسبب "خطأ التخصيص الديناميكي"

يذكر الباحث Sargan 1964 بأن المعنوية الإحصائية لـ (D-W) لاتعني بالضرورة وجود مشكل الارتباط عبر الزمن. حيث لاحظ ذلك الباحثان Hendry-Mizon (1978) عندما إقترحا النموذج التالي:

$$Y_t = \beta X_t + u_t$$

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t$$

$$V_t \sim IN(0, \sigma_v^2)$$

ليكون النموذج المحول على الشكل:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \beta X_t - \beta \phi X_{t-1} + V_t$$

ثم يعتبران النموذج الديناميكي المستقر والبديل على النحو:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 X_t + \alpha_3 X_{t-1} + V_t$$

$$|\alpha_1| < 1$$

وإذا وضعنا القيد $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ يكون النموذج المحول والنموذج الديناميكي المستقر متكافئين. حيث أن الإختبار من أجل $\phi = 0$ يكافئ الإختبار من أجل $\alpha_1 = 0$ و $\alpha_3 = 0$. ولكن قبل التطرق إلى ذلك. يذكر Sargan بأنه يجب أولاً. إختبار القيد $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. ومنه يكون الإختبار من أجل $\phi = 0$ صحيحاً فقط إذا كانت الفرضية $H_0: \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ محققة (وغير مرفوضة). إذ أن رفض هذه الفرضية يعني عدم وجود إرتباط عبر الزمن بالنموذج. ومنه يكون الإرتباط الذاتي للأخطاء عبر الزمن AR(1) بالمعادلة $Y_t = \beta X_t + u_t$. ناتج بسبب "خطأ التخصيص الديناميكي". أي حذف المتغيرات Y_{t-1} و X_{t-1} من المعادلة المفروض تقديرها.

ونلاحظ أن القيد $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ غير خطي في المعالم α_j . ومنه يجب استعمال الإختبارات المناسبة لهذه الحالة من القيود غير الخطية والمشروحة بالفصل الخامس مثل إختبارات (LM, LR, W). وبالتالي نقول إذا كان إختبار (D-W) معنوي. تكون أحسن طريقة للتأكد من وجود نموذج إرتباط عبر الزمن هو إختبار القيد غير الخطي أعلاه قبل استعمال أي تحويل إرتباط ذاتي للمتغيرات الأصلية. ويقترح Sargan 1981 البدء بالنموذج الديناميكي أعلاه لإختبار هذا القيد قبل اعتماد أي إختبارات للإرتباط عبر الزمن. وللقيام بذلك ندخل توسيعات سلاسل تايلور لإعادة كتابة القيد المذكور في شكله الخطي. ثم نستعمل إختبار Wald. والذي يكون إختباراً تقاربياً. أي نكتب:

$$f(\alpha) = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3$$

$$f(\hat{\alpha}) = f(\alpha) - \sum_{j=1}^3 g_j (\hat{\beta}_j - \beta_j)$$

$$g_j = \partial f(\cdot) / \partial \beta_j \quad \text{حيث أن:}$$

وكذلك في ظل H_0 صحيحة تكون $f(\alpha) = 0$ ونجد:

$$E(f(\hat{\alpha})) = 0$$

ومادام:

$$*E(\hat{\alpha}_j) = \alpha_j$$

$$* \text{var}[f(\hat{\alpha})] = \sigma_u^2 \sum_i \sum_j g_i g_j C_{ij}$$

$$* \text{cov}(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j) = \sigma_u^2 C_{ij}$$

نضع العبارة:

$$\text{var}[f(\hat{\alpha})] = \sigma_u^2 \psi$$

ثم نعوض \hat{g}_i من أجل g_i ، و $\hat{\sigma}_u^2$ من أجل σ_u^2 للحصول على القيمة التقديرية:

$$\hat{\text{var}}[f(\hat{\alpha})] = \sigma_u^2 \hat{\psi}$$

وأخيرا نكون الاختبار الإحصائي التالي:

$$W = \frac{[f(\hat{\alpha})]^2}{\hat{\sigma}_u^2 \hat{\psi}} \sim \chi_1^2$$

حيث يمكن كتابة القيد $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ على الشكل:

$$f_1(\alpha) = \alpha_1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = 0$$

وهذا معناه أن: $g_3 = 1/\alpha_2$ ، $g_2 = -\alpha_3/\alpha_2^2$ ، $g_1 = 1$

أو على الشكل البديل التالي:

$$f_2(\alpha) = \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 0$$

ن يعني ذلك أن: $g_3 = 1/\alpha_1$ ، $g_2 = 1$ ، $g_1 = -\alpha_3/\alpha_1^2$

ويرى Gregory-Veall 1986 أنه من الأفضل استعمال القيود

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
 عوضا عن الشكلين الآخرين.

3-3-6 الحلول المقترحة للإرتباط الذاتي

إن حل كل حالة يعتمد على مصدر الإرتباط الذاتي. فإذا كان المصدر هو

حذف متغيرات أساسية من النموذج، يكون الحل بإعادة إدخال هذه المتغيرات

في مجموعة المتغيرات المستقلة. وتكون أبسط طريقة لإكتشاف ما إذا كان سبب الارتباط الذاتي هو حذف متغيرات من النموذج بواسطة تحديد بواقي المربعات الصغرى \hat{U}_t ضد المتغيرات التي تكون مسبقا لها علاقة بالمتغيرات المستقلة للظاهرة الموجودة تحت الدراسة. عندما نكتشف ظاهرة الارتباط الذاتي (بإجراء الاختبارات المناسبة) يمكن أن نصح النموذج وذلك بالحصول على مقدار لقيمة ϕ بواسطة تطبيق المربعات الصغرى العادية لمجموعة البيانات المحولة.

إن تحويل البيانات الأصلية يعتمد على الشكل أو البناء الهيكلي الأصلي للارتباط الذاتي. حيث إذا كان الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى $AR(1)$ ، يكون التحويل بواسطة طرح النموذج المؤخر بفترة واحدة ومضروبا بمقدار المعلمة ϕ من النموذج الأصلي أي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + u_t$$

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t$$

$$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{2,t-1} + \dots + \beta_k X_{k,t-1} + u_{t-1}$$

ثم نضرب المعادلة الأخيرة بـ ϕ ثم نطرحها من المعادلة المثلثة لـ Y_t لنجد:

$$Y_t - \phi Y_{t-1} = (\beta_1 - \phi \beta_1) + \beta_2 (X_{2t} - \phi X_{2,t-1}) + \dots + \beta_k (X_{kt} - \phi X_{k,t-1}) + V_t$$

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_{2t}^* + \dots + \beta_k X_{kt}^* + V_t$$

حيث أن:

$$\beta_1^* = \beta_1(1 - \phi)$$

$$X_{jt}^* = X_{jt} - \phi X_{j,t-1} \quad j = 2, 3, \dots, k$$

ومنه إذا عرفنا قيمة ϕ نستطيع تطبيق قانون المربعات الصغرى العادية على النموذج المحول. كما نلاحظ أن النموذج المحول يحتوي على $(n-1)$ ملاحظات بسبب سقوط الملاحظة الأولى. ولتحاشي هذا الضياع في الملاحظات فإن بعض الإحصائيين أمثال Prais-Winsten، يقترحون كتابة الشكل المحول للملاحظة الأولى كمايلي:

$$Y_1^* = \sqrt{1 - \phi^2} \cdot Y_1$$

$$X_1^* = \sqrt{1 - \phi^2} \cdot X_1$$

ويلاحظ بعض الكتاب أنه إذا كانت إحصاءة (D-W) أقل من معامل التحديد المضاعف، أي $d < R^2$ ، فإنه يمكن إستعمال الفروقات الأولى في ملاحظات متغيرات النموذج. حيث نحدر الفرق الأول $(Y_t - Y_{t-1})$ في مجموعة الفروقات الأولى للمتغيرات المستقلة $(X_{1t} - X_{1,t-1})$ وذلك تحت الفرضية القائلة بأن الفروقات الأولى للأخطاء $(u_t - u_{t-1})$ تكون مستقلة.

مثال (5.6):

ليكن النموذج الخطي البسيط:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

فتأخير هذا النموذج بفترة واحدة وطرحه من المعادلة الأصلية يعطي:

$$(Y_t - Y_{t-1}) = \beta_2 (X_t - X_{t-1}) + (u_t - u_{t-1})$$

$$DY_t = \beta_2 DX_t + V_t$$

تسمى هذه المعادلة بمعادلة الفروقات الأولى. حيث إذا كانت الأخطاء مستقلة، نستطيع تقدير هذه المعادلة بواسطة المربعات الصغرى العادية. لكن نلاحظ أن هذه المعادلة لا تحتوي على الحد الثابت. وللحصول على هذا الأخير نستعمل متغير الاتجاه العام الخطي على الشكل:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 t + u_t$$

وبطرح المعادلة الأخيرة في الفترة (t-1) من النموذج الأصلي نجد:

$$(Y_t - Y_{t-1}) = \beta_3 + \beta_2 (X_t - X_{t-1}) + (u_t - u_{t-1})$$

$$DY_t = \beta_3 + \beta_2 DX_t + V_t$$

ونلاحظ أنه لما نقارن معادلات الفروقات الأولى، لا يمكننا مقارنة قيم R^2 لأن المتغيرات المستقلة تكون مختلفة، وإنما نقارن مجموعات مربعات البواقي بعد إجراء تعديل مناسب (17).

4-3-6 طرق تقدير المعالم في ظل الارتباط الذاتي للأخطاء

بعد أن تحدثنا عن الفروقات الأولى، لنعتبر الآن التقدير بواسطة شبه الفروقات الأولى. حيث في حالة $AR(1)$ نحذر $(Y_t - \phi Y_{t-1})$ في المتغيرات المستقلة لشبه الفروقات الأولى $(X_{jt} - X_{j,t-1})$ وتسمى نظام $AR(1)$ بمعادلة الإنحدار الذاتي لأنها عبارة عن نموذج الإنحدار العادي لـ u_t في u_{t-1} أو نسميها الإنحدار الذاتي من المرتبة الأولى. وإذا كانت u_t محدرة في قيمها السابقة بفترتين نسميها بمعادلة الإنحدار الذاتي من المرتبة الثانية وهكذا. وبغض النظر عن معاملة الملاحظة الأولى في $AR(1)$ والملاحظتين الأولى في $AR(2)$ وهكذا.... فإن طريقة المربعات الصغرى المعممة تستعمل البيانات المحولة. ففي النموذج الخطي البسيط $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$ مع نظام $AR(1)$ تكون المصفوفة غير شاذة P على الشكل:

$$P = \begin{bmatrix} (1 - \phi^2)^{1/2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\phi & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & -\phi & 1 \end{bmatrix}$$

إن تطبيق نظرية AITKEN تعطي النموذج المحول التالي:

$$\begin{bmatrix} (1-\phi^2)^{1/2} Y_1 \\ Y_2 - \phi Y_1 \\ \vdots \\ Y_n - \phi Y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\phi^2)^{1/2} & (1-\phi^2)^{1/2} X_1 \\ (1-\phi) & X_2 - \phi X_1 \\ \vdots & \vdots \\ (1-\phi) & X_n - \phi X_{n-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\phi^2)^{1/2} u_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$\text{var}[(1-\phi^2)^{1/2} u_1] = \sigma_v^2 \quad \text{حيث أن:}$$

إذا كان ϕ معروفا فيمكن تطبيق قانون المربعات الصغرى المعممة مباشرة على العينات المحولة. ثم يمكن توسيع النموذج أعلاه ليشمل عدة متغيرات مستقلة ومرتبة أعلى من الارتباط الذاتي. حيث أن إضافة متغيرات مستقلة أخرى يكون بنفس الطريقة المتبعة في النموذج البسيط. وإذا كانت الأخطاء من نظام AR(4)

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \dots + \phi_4 u_{t-4} + v_t \quad \text{على الشكل:}$$

فإن النموذج المحول يكون على الشكل:

$$Y_t - \sum_{i=1}^4 \phi_i Y_{t-i} = \beta_1 (1 - \sum_{i=1}^4 \phi_i) + \beta_2 (X_{2t} - \sum_{i=1}^4 \phi_i X_{2,t-i}) + \dots + \beta_k (X_{kt} - \sum_{i=1}^4 \phi_i X_{k,t-i}) + V_t$$

$$t = 5, 6, \dots, n$$

والتي يمكن إعادة صياغتها على الشكل:

$$Y_t - \sum_{i=1}^4 \phi_i Y_{t-i} = \beta_1 (1 - \sum_{i=1}^4 \phi_i) + \sum_{j=2}^k \beta_j (X_{jt} - \sum_{i=1}^4 \phi_i X_{j,t-i}) + V_t$$

$$t = 5, 6, \dots, n$$

وهناك تحويلات خاصة تكون مطلوبة بالنسبة للملاحظات الأربعة الأولى. بما أن المعلمة ϕ غير معروفة، فيجب تقديرها مثل بقية المعالم الأخرى. ومنه نقوم بتأخير النموذج البسيط، مثلاً، بفترة واحدة من أجل AR(1)، ثم نضرب حدود هذا النموذج بالمعلمة ϕ ونطرح الناتج من النموذج البسيط الأصلي لنجد:

$$Y_t = \beta_1 (1 - \phi) + \beta_2 X_t - \beta_2 \phi X_{t-1} + \phi Y_{t-1} + V_t : t = 2, 3, \dots, n$$

إن تقدير المعادلة أعلاه، يعطي مقدرات غير متسقة ومنه يجب البحث عن طرق أخرى لتقدير هذه المعادلة وهي عادة طريقتان (طرق التكرار أو طرق البحث بمجال).

1-4-3-6 طريقة التكرار لكوكران-أوركات: Cochrane-Orcut Method

إن أول طرق التكرار هي تلك الطريقة المقترحة من طرف الباحثين Cochrane-Orcutt 1949 حيث نقدر المعادلة:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t$$

بواسطة المربعات الصغرى العادية لنحصل على البواقي \hat{U}_t . ثم نقدر ϕ بواسطة العبارة:

$$\hat{\phi} = \sum_{t=2} \hat{U}_t \hat{U}_{t-1} / \sum_{t=1} \hat{U}_t^2$$

ونتبع الخطوات التالية:

1- نعوض قيمة $\hat{\phi}$ في النموذج المحول لنحصل على:

$$Y_t - \hat{\phi} Y_{t-1} = \beta_1 (1 - \hat{\phi}) + \beta_2 (X_t - \hat{\phi} X_{t-1}) + V_t$$

2- نقدر المعادلة الأخيرة أعلاه، بواسطة المربعات الصغرى لنحصل على بواقي جديدة \hat{U}_t . ثم نعوض هذه البواقي في القانون:

$$\hat{\phi} = \sum_{t=2} \hat{U}_t \hat{U}_{t-1} / \sum_{t=1} \hat{U}_t^2$$

حيث أن:

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 (1 - \hat{\phi}) (1 - \hat{\phi})^{-1}$$

ثم نحول النموذج الأصلي على الشكل:

$$Y_t - \hat{\phi} Y_{t-1} = \beta_1 (1 - \hat{\phi}) + \beta_2 (X_t - \hat{\phi} X_{t-1}) + V_t$$

نعيد الخطوتين الأولى والثانية، إلى أن يحدث التقارب. أي إلى أن تصبح قيمتي $\hat{\phi}$ خلال فترتين متتاليتين متساوية.

يتوقف الباحثون، في بعض الأحيان، عند الخطوة الثانية. وتسمى هذه الطريقة بطريقة خطوتين لكوكران-أوركات. والطريقة البديلة لذلك هي أن نستعمل في كل خطوة تكرار القيمة الإحصائية، d ، لداربين-واتسون لإختبار البواقي من

أجل الارتباط الذاتي للأخطاء. إذا أثبت الاختبار بأن H_0 صحيحة، نوقف التكرار. أما إذا كانت $\phi \neq 0$ هي صحيحة نواصل التكرار حتى نثبت صحة H_0 . ويمكن إجراء اختبارات المعنوية لـ $\hat{\phi}$ فقط عند آخر تكرار.

2-4-3-6 طريقة خطوتين لداربين

يقترح داربين (1960) طريقة بديلة لتقدير ϕ . حيث تصلح هذه الطريقة لأكثر من متغير مستقل. وذلك لنظام الارتباط الذاتي من المرتبة P ، $AR(P)$. فإذا أخذنا النموذج الخطي العام مع نظام $AR(P)$:

$$Y = X\beta + U$$

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \dots + \phi_P u_{t-P} + V_t$$

يكون النموذج المحول على الشكل:

$$Y_t - \sum_{i=1}^P \phi_i Y_{t-i} = \beta_1 (1 - \sum_{i=1}^P \phi_i) + \beta_2 (X_{2t} - \sum_{i=1}^P \phi_i X_{2,t-i}) + \dots + \beta_K (X_{Kt} - \sum_{i=1}^P \phi_i X_{K,t-i}) + V_t$$

$$t = P+1, P+2, \dots, n$$

ويمكن إعادة صياغته على الشكل:

$$Y_t = \beta_1 (1 - \sum_{i=1}^P \phi_i) + \sum_{i=1}^P \phi_i Y_{t-i} + \sum_{j=2}^K \beta_j (X_{jt} - \sum_{i=1}^P \phi_i X_{j,t-i}) + V_t \dots (6.109)$$

$$t = P+1, P+2, \dots, n$$

وتكون طريقة التقدير على أساس تحديد المعادلة (6.109) ثم نأخذ مقدرات

معالم المتغيرات التابعة المؤخرة Y_{t-i} كمقدرات لـ ϕ_i حيث $i = 1, 2, \dots, P$. ولما نحصل على المقدرات $\hat{\phi}_i$ نكون المتغيرات المحولة على الشكل:

$$Y^* = Y_t^* = Y_t - \sum_{i=1}^P \hat{\phi}_i Y_{t-i} : t = P+1, P+2, \dots, n$$

$$X^* = X_{jt}^* = X_{jt} - \sum_{i=1}^P \hat{\phi}_i X_{j,t-i}$$

$$t = P+1, P+2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, K$$

نقدر إنحدار الموجه Y^* في المصفوفة X^* ونلاحظ أن الحد الثابت هنا هو $\beta_1(1 - \sum_{i=1}^P \phi_i)$. ومنه بعد تقدير إنحدار Y^* في X^* ، يجب تعديل الحد الثابت بطريقة مناسبة للحصول على مقدرات المعالم للمعادلة الأصلية. كما أن الأخطاء المعيارية المحسوبة من إنحدار Y^* في X^* هي الآن أخطاء معيارية تقاربية، لأن المعالم ϕ_i مقدرة وليست حقيقية. كما نلاحظ أنه في حالة وجود عدة متغيرات مستقلة (مثل حالتنا هذه)، فإن النموذج، بعد تحويله، سوف يحتوي على $(2k)$ متغيرة مستقلة $P+$ متغيرة تابعة مؤخرة)، وبالتالي تكون درجات حرية النموذج المقدر هي $n-(2k+P)$. وإذا كان حجم العينة صغيراً، نسبياً، فإن ذلك قد يؤدي إلى مشاكل أخرى في التقدير، نكون في غنى عنها. إذن من المستحسن إستعمال طريقة (C-0) حتى يحدث التقارب. كما بين كذلك Gaudy-Dufour 1980 بأن تصغير $\sum V_t^2$ بالمعادلة (109.6)، يمكن أن يعطي عدة حلول (مضاعفة) للمعالم ϕ_i . بينما يمكن لطريقة (C-0)، المعتمدة على حل وحيد لـ ϕ_i ، أن تعطي نقاطاً محلية Local minimums. ومنه يكون من الأفضل إستعمال طرق البحث بمجال أو ما يسمى Grid Search.

مثال (66):

لنعتبر النموذج الخطي البسيط:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t$$

1- نكتب النموذج المحول على الشكل:

$$Y_t = \beta_1(1 - \phi) + \phi Y_{t-1} + \beta_2 X_t - \beta_2 \phi X_{t-1} + V_t$$

ثم نضع:

$$\alpha_1 = \beta_1(1 - \phi)$$

$$\alpha_2 = \beta_2$$

$$\alpha_3 = -\beta_2 \phi$$

لتصبح المعادلة الجديدة على الشكل:

$$Y_t = \alpha_1 + \phi Y_{t-1} + \alpha_2 X_t + \alpha_3 X_{t-1} + V_t$$

وبعد تطبيق قانون المربعات الصغرى العادية على هذه المعادلة الأخيرة،

نحصل على المقدّر $\hat{\phi}$ والذي يمثل معلمة المتغير التابع المؤخر بفترة واحدة.

2- نستعمل المقدّر $\hat{\phi}$ (من الخطوة 1) للحصول على المتغيرات المحولة:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\phi} Y_{t-1}$$

$$X_t^* = X_t - \hat{\phi} X_{t-1}$$

ثم نقدر معالم العلاقة الجديدة:

$$Y_t^* = \beta_1 + \beta_2 X_t^* + V_t$$

وتعطي هذه الطريقة مقدرات لها الخصائص التقاربية المثلى. وتكون أكثر

كفاءة لكل العينات المختلفة الحجم.

3-4-3-6 طرق البحث بمجال:

إن أول طريقة للبحث بمجال هي طريقة Hildreth-Lu 1960، وتجري كما يلي:

1- نكون المتغيرات المحولة:

$$Y_t^* = Y_t - \phi Y_{t-1}$$

$$X_t^* = X_t - \phi X_{t-1}$$

2- نحسب Y_t^* ، X_t^* من أجل قيم مختلفة لـ ϕ عند مجالات تتغير بالقيمة (0.1)

3- نقدر إنحدار Y_t^* في X_t^* عند كل قيمة جديدة لـ ϕ المنتسبة للمجال $|\phi| < 1$.

ثم نحسب مجموع مربعات البواقي RSS عند هذه القيم لـ ϕ .

4- نختار قيمة ϕ التي تعطي أصغر قيمة لمجموع مربعات البواقي RSS.

5- نعيد هذه العملية من أجل مجالات تحرك أصغر لـ ϕ حول تلك القيمة التي

تعطي أصغر RSS. فمثلا إذا كانت القيمة التي تعطي أصغر RSS هي $\phi = 0.6$

فننتقل للبحث من أجل قيم ϕ المنتمية للحدود $0.6 \leq \phi \leq 0.7$ وهي مثلا

[0.61, 0.62, ..., 0.69]

4-4-3-6 التقدير بطريقة المعقولة العظمى:

ليكن النموذج الخطي العام:

$$Y = X\beta + U$$

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t$$

$$u_t \sim N(0, \sigma_u^2 \psi)$$

ثم لدينا:

$$E(UU') = \sigma_u^2 \psi = \sigma_v^2 (1 - \phi^2)^{-1} \psi$$

ثم نكون دالة المعقولة العظمى على الشكل:

$$L(\beta, \sigma_u^2, \phi) = \left[\frac{1}{(2\pi)^n (\sigma_u^2)^n |\psi|} \right]^{1/2} \cdot \exp \left[\frac{-1}{2\sigma_u^2} \cdot Q \right]$$

$$Q = (Y - X\beta)' \psi^{-1} (Y - X\beta)$$

حيث أن:

وبإدخال اللوغاريتم الطبيعي نجد:

$$\log L = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma_u^2 - \frac{1}{2} \log |\psi| - \frac{1}{2\sigma_u^2} \cdot Q$$

وباشتقاق $\log L$ بالنسبة لكل من σ_u^2 ، β نجد:

$$\tilde{\beta}_G = (X' \tilde{\psi}^{-1} X)^{-1} X' \tilde{\psi}^{-1} Y$$

$$\tilde{\sigma}_{uG}^2 = \frac{1}{n} (Y - X\tilde{\beta}_G)' \tilde{\psi}^{-1} (Y - X\tilde{\beta}_G)$$

حيث أن $\tilde{\beta}_G$ ، $\tilde{\sigma}_{uG}^2$ هما مقدرتي المعقولة العظمى في ظل الارتباط

الذاتي. أما مشتقات $\log L$ بالنسبة لـ ϕ ، فهي معقدة جدا وليس لها أي شكل

تحليلي. وبالتعويض عن هاتين القيمتين في لوغاريتم دالة المعقولة نجد:

$$\begin{aligned} \log L_c(\phi) = & -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \left[\frac{1}{n} Y' (\psi^{-1} - \psi^{-1} X (X' \psi^{-1} X)^{-1} X' \psi^{-1}) Y \right] \\ & + \frac{1}{2} \log |\psi^{-1}| - \frac{n}{2} \end{aligned}$$

$$\log L_c(\phi) = -\frac{n}{2}[\log 2\pi + 1] + \frac{1}{2}\log|\psi^{-1}|$$

$$-\frac{n}{2}\log\left[\frac{1}{n}Y'(\psi^{-1} - \psi^{-1}X(X'\psi^{-1}X)^{-1}X'\psi^{-1})Y\right]$$

وتسمى هذه العبارة بدالة المعقولية العظمى المركزة Concentrated $\log L$ وإشتقاق هذه الدالة نستعمل طرق التدنئة العديدة والمفصلة في Harvey 1981 (18).

مثال (6):

لنعتبر النموذج الخطي البسيط:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t : |\phi| < 1$$

$$V_t \sim IN(0, \sigma_v^2)$$

ونكون هنا مهتمين فقط بالنتائج التقاربية، حيث معاملة الملاحظة الأولى للعيينة لاتهم مادام الأثر يصبح مهملًا لما تكون n كبيرة. ونكتب النموذج المحول على الشكل:

$$V_t = u_t - \phi u_{t-1}$$

$$= (Y_t - \beta_1 - \beta_2 X_t) - \phi(Y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 X_{t-1}) : t = 2, 3, \dots, n$$

ومنه يكون لو غاريتم دالة المعقولية العظمى هو:

$$\log L(\beta_1, \beta_2, \phi, \sigma_u^2) = -\frac{(n-1)}{2}\log 2\pi - \frac{(n-1)}{2}\log \sigma_v^2 - \frac{1}{2\sigma_v^2} \sum_{t=2}^n V_t^2$$

إن المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة للمعالم غير المعروفة هي:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_1} = \frac{1-\phi}{\sigma_v^2} \sum V_t = 0$$

¹⁸-(مرجع سابق) 1981 "The Econometric Analysis of Time Series" A.C.Harvey

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_2} = \frac{1}{\sigma_v^2} \sum (X_t - \phi X_{t-1}) V_t = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \phi} = \frac{1}{\sigma_v^2} \sum u_{t-1} V_t = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_v^2} = \frac{n-1}{2\sigma_v^2} + \frac{1}{2\sigma_v^4} \sum V_t^2 = 0$$

حيث أن $t = 2, 3, \dots, n$. وبحل المعادلات الأربعة أعلاه، نحصل على مقدرات المعقولة العظمى الشرطية. وتعطي المعادلات الثلاثة الأولى:

$$\sum (Y_t - \tilde{\phi} Y_{t-1}) = (n-1) \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 \sum (X_t - \tilde{\phi} X_{t-1})$$

$$\sum (Y_t - \tilde{\phi} Y_{t-1})(X_t - \tilde{\phi} X_{t-1}) = (n-1) \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 \sum (X_t - \tilde{\phi} X_{t-1})^2$$

$$\tilde{\phi} = \frac{\sum (Y_t - \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 X_t)(Y_{t-1} - \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 X_{t-1})}{\sum (Y_{t-1} - \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 X_{t-1})^2}$$

ومنه نلاحظ أن تصغير $\sum V_t^2$ ليس مثل تعظيم $\log L$. كما يمكن استعمال طريقة البحث بمجال للحصول على مقدرات المعقولة العظمى أعلاه. والفرق الوحيد هو بعد أن نحسب مجموع مربعات البواقي RSS لكل قيمة من أجل ϕ ، نختار قيمة ϕ التي تجعل المقدار $\frac{1}{2} \log(1 - \phi^2) = \frac{n}{2} \log(RSS)$ أدنى ما يمكن. وإذا كان عدد الملاحظات كبيرا، فإن الحد الأخير سوف يكون صغيرا بالمقارنة مع سابقه. وغالبا ما تعطي طريقتي المعقولة العظمى والبحث بمجال (Hildreth-Lu) نفس النتيجة.

ولنحسب الآن المشتقات الجزئية الثانية:

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_1^2} = \frac{-(n-1)}{\sigma_v^2} (1 - \phi^2)$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_2^2} = \frac{-1}{\sigma_v^2} \sum (X_t - \phi X_{t-1})^2$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \phi^2} = \frac{-1}{\sigma_v^2} \sum u_{t-1}^2$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial (\sigma_v^2)^2} = \frac{n-1}{2\sigma_v^4} - \frac{1}{\sigma_v^6} \sum v_t^2$$

أما المشتقات المتقاطعة فهي:

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = \frac{-(1-\phi)}{\sigma_v^2} \sum (X_t - \phi X_{t-1})$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_1 \partial \phi} = -\frac{1}{\sigma_v^2} \left[\sum v_t + (1-\phi) \sum u_{t-1} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_1 \partial \sigma_v^2} = -\frac{(1-\phi)}{\sigma_v^2} \sum v_t$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_2 \partial \phi} = \frac{1}{\sigma_v^2} \left[\sum v_t X_{t-1} - \sum v_{t-1} (X_t - \phi X_{t-1}) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_2 \partial \sigma_v^2} = \frac{-1}{\sigma_v^4} \sum v_t (X_t - \phi X_{t-1})$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \phi \partial \sigma_v^2} = \frac{-1}{\sigma_v^4} \sum v_t u_{t-1}$$

وبإدخال مصفوفة المعلومات من الفصل الخامس.

$$I(\theta) = I(\beta_1, \beta_2, \phi, \sigma_v^2) = -E[D^2 \log L(\beta_1, \beta_2, \phi, \sigma_v^2)]$$

لنجد العبارة التالية (19):

$$I(\theta) = \frac{1}{\sigma_v^2} \begin{bmatrix} (n-1)(1-\phi)^2 & (1-\phi) \sum (X_t - \phi X_{t-1}) & 0 & 0 \\ (1-\phi) \sum (X_t - \phi X_{t-1}) & \sum (X_t - \phi X_{t-1})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n-1)\sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n-1}{2\sigma_v^2} \end{bmatrix}$$

19- (مرجع سابق) J. Johnston "Econometric Methods" 1984, PP: 327-329

أما إذا كان لدينا النموذج الخطي العام مع نظام $AR(P)$ فإن دالة المعقولية العظمى تكون على الشكل:

$$\log L(\phi, \beta, \sigma_v^2) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma_v^2 - \frac{1}{2} \log |\psi| - \frac{1}{2\sigma_v^2} Q_1 - \frac{1}{2\sigma_v^2} Q_2$$

حيث أن:

$$Q_1 = (Y - X\beta)' \psi^{-1} (Y - X\beta): t = 1, 2, \dots, P$$

$$Q_2 = \sum_{t=P+1}^n [(Y_t - X_t'\beta) - \phi_1(Y_{t-1} - X_{t-1}'\beta) - \dots - \phi_P(Y_{t-P} - X_{t-P}'\beta)]^2$$

$$t = P+1, P+2, \dots, n$$

إن تعظيم لوغاريتم دالة المعقولية أعلاه بالنسبة للموجه β يعطي مقدار المربعات الصغرى المعممة من أجل قيم معطاة للموجه $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_P)'$. ومن أجل الحصول على مقدار للموجه ϕ نستعين بلوغاريتم دالة المعقولية العظمى المركزة (20).

5-3-6 التنبؤ في ظل الارتباط الذاتي من النوع $AR(1)$

لدينا نموذج العينة على الشكل: $Y = X\beta + U$ مع الفرضية الموجودة بالمعادلة (3.6). ولنفرض أنه لدينا سطر X_{n+1} لقيم المتغيرات المستقلة في الفترة $n+1$ ، ونريد تقدير الملاحظة Y_{n+1} . لقد حصلنا على التنبؤ الخطي في ظل عدم تجانس تباينات الأخطاء على الشكل:

$$\hat{Y}_s = x_s' \hat{\beta}_G + w' \psi^{-1} \hat{U}_G$$

$$\hat{\beta}_G = (X' \psi^{-1} X)^{-1} X' \psi^{-1} Y$$

20- للتعلم أكثر أنظر (مرجع سابق) A.C Harvey 1981, PP:204-206

$$w = \frac{1}{\sigma_u^2} \begin{bmatrix} E(u_1 u_s) \\ E(u_2 u_s) \\ \vdots \\ E(u_n u_s) \end{bmatrix}$$

وبالمقارنة يكون التنبؤ الخطي بملاحظة في المستقبل، في ظل الارتباط الذاتي للأخطاء من النوع AR(1)، على الشكل:

$$\hat{Y}_{n+1} = X_{n+1} \hat{\beta}_G + w' \psi^{-1} \hat{U}_G$$

حيث أن w يكون الآن على الشكل:

$$w = \frac{1}{\sigma_u^2} \begin{bmatrix} E(u_{n+1} u_1) \\ E(u_{n+1} u_2) \\ \vdots \\ E(u_{n+1} u_n) \end{bmatrix}$$

ونعرف أنه في ظل AR(1) يكون $E(u_t u_{t-s}) = \phi^s \sigma_u^2$ ، لينتج لدينا:

$$w = \begin{bmatrix} \phi^n \\ \phi^{n-1} \\ \vdots \\ \phi \end{bmatrix} = \phi \begin{bmatrix} \phi^{n-1} \\ \phi^{n-2} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبمعرفة المصفوفة ψ من المعادلة (97.6)، نستنتج أن الموجه w هو عبارة عن ϕ مضروبة في آخر عمود من المصفوفة ψ . لكن لدينا $\psi \psi^{-1} = I$ ، إذن تعطي المصفوفة $w' \psi^{-1}$ موجهها هو عبارة عن ϕ مضروبة في آخر سطر من مصفوفة الوحدة I_n . كما يلي:

$$w' \psi^{-1} = \frac{\phi}{1-\phi^2} [\phi^{n-1} \quad \dots \quad \phi \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -\phi & 0 & \dots & 0 \\ -\phi & 1+\phi^2 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1+\phi^2 & -\phi \\ 0 & \dots & 0 & -\phi & 1 \end{bmatrix} = \phi [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

$$w' \psi^{-1} \hat{U}_G = \phi \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_{1G} \\ \hat{U}_{2G} \\ \vdots \\ \hat{U}_{nG} \end{bmatrix} = \phi \hat{U}_{nG}$$

ومنه يكون التنبؤ بفترة في المستقبل هو:

$$\hat{Y}_{n+1} = X_{n+1} \hat{\beta}_G + \phi \hat{U}_{nG}$$

وإذا أردنا التنبؤ بفترتين بالمستقبل يكون التنبؤ الخطي المقدّر هو:

$$\hat{Y}_{n+2} = X_{n+2} \hat{\beta}_G + w' \psi^{-1} \hat{U}_G$$

حيث تكون المشاهدة الحقيقية للتنبؤ بفترتين هي:

$$Y_{n+2} = X_{n+2} \beta + U_{n+2}$$

لتصبح مصفوفة التباين المشترك w على الشكل:

$$w = \frac{1}{\sigma_u^2} \begin{bmatrix} E(u_{n+2} u_1) \\ E(u_{n+2} u_2) \\ \vdots \\ E(u_{n+2} u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{n+1} \\ \phi^n \\ \vdots \\ \phi^2 \end{bmatrix} = \phi^2 \begin{bmatrix} \phi^{n-1} \\ \phi^{n-2} \\ \vdots \\ \phi \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومنه تصبح لدينا:

$$w' \psi^{-1} \hat{U}_G = \phi^2 \hat{U}_{nG}$$

لكي يصبح التنبؤ الخطي لفترتين في المستقبل هو:

$$\hat{Y}_{n+2} = X_{n+2} \hat{\beta}_G + \phi^2 \hat{U}_{nG}$$

ومنه نعم التنبؤ في الفترة j حيث $j \geq 1$ ليصبح:

$$\hat{Y}_{n+j} = X_{n+j} \hat{\beta}_G + \phi^j \hat{U}_{nG} : j = 1, 2, \dots, m$$

أما لما نريد التنبؤ بمجموعة الملاحظات $j = 1, 2, \dots, m$ مرة واحدة،

فيكون التنبؤ على الشكل:

$$Y_n^m = X_n^m \beta + U_n^m$$

حيث أن هذا النموذج معرف من قبل في دراستنا بالفصل الرابع. ولتأخذ مصفوفة التباين المشترك لملاحظات أخطاء العينة وملاحظات أخطاء التنبؤ:

$$E \begin{pmatrix} U \\ U_n^m \end{pmatrix} (U' \quad U_n'^m) = E \begin{bmatrix} UU' & UU_n'^m \\ U_n^m U' & U_n^m U_n'^m \end{bmatrix} \\ = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \psi_n & w_n^m \\ w_n'^m & \psi_m \end{bmatrix}$$

حيث أن ψ_n هي مصفوفة معرفة من قبل وذات أبعاد $n \times n$ أما ψ_m فهي $m \times m$ ، أما w_n^m فهي ذات أبعاد $m \times n$.

ويصبح التنبؤ الخطي لمواجهة الملاحظات $j = 1, 2, \dots, m$ على الشكل:

$$\hat{Y}_n^m = X_n^m \hat{\beta}_G + w' \psi^{-1} \hat{U}_G$$

حيث أن w تصبح الآن عبارة عن مصفوفة $(n \times m)$ كمايلي:

$$w_n^m = \frac{1}{\sigma_u^2} (U' \quad U_n'^m) = \frac{1}{\sigma_u^2} E \left[\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} (U_{n+1} \quad U_{n+2} \quad \dots \quad U_{n+m}) \right] \\ w_n^m = \begin{bmatrix} \phi^n & \phi^{n+1} & \dots & \dots & \phi^{n+m-1} \\ \phi^{n-1} & \phi^n & \dots & \dots & \phi^{n+m-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \phi & \phi^2 & \dots & \dots & \phi^n \end{bmatrix}$$

لينتج أن:

$$w_n'^m \psi^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \phi \\ 0 & \vdots & & 0 & \phi^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \phi^m \end{bmatrix}$$

$$W_n' \psi^{-1} \hat{U}_G = [\phi \hat{U}_{nG} \quad \phi^2 \hat{U}_{nG} \quad \dots \quad \phi^m \hat{U}_{nG}]'$$

وفي حالة عدم معرفتنا المسبقة لقيمة ϕ فإننا نعوض عنها بالمقدر $\hat{\phi}$ المحصل من آخر تكرار.

مثال (3.6):

لنعتبر النموذج الخطي البسيط $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$ مع نظام $AR(1)$ في حالة وجود ارتباط ذاتي فإننا نحتاج إلى معلومات إضافية حتى نحصل على أفضل تنبؤ ممكن. ولنفرض مبدئياً أننا نريد التنبؤ بالملاحظة Y_{n+1} . فبدلاً من وضع U_{n+1} تساوي الصفر للحصول على التنبؤ، نلاحظ أن نظام $AR(1)$ يعطي أفضل تنبؤ للقيمة U_{n+1} وكذلك للقيمة ϕU_n ، حيث أن $U_{n+1} = \phi U_n + V_{n+1}$. نعوض المقدرين $\hat{\phi}$ ، \hat{U}_n على التوالي في التنبؤ $\hat{\phi} \hat{U}_n$. ومنه نأخذ التنبؤ Y_{n+1} من العبارة.

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{n+1} + \hat{U}_{n+1}$$

$$\hat{U}_{n+1} = \hat{\phi} \hat{U}_n$$

ولدينا:

لتصبح:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n+1} &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{n+1} + \hat{\phi} \hat{U}_n \\ &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{n+1} + \hat{\phi} (Y_n - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_n) \\ &= \hat{\phi} Y_n + \hat{\beta}_1 (1 - \hat{\phi}) + \hat{\beta}_2 (X_{n+1} - \hat{\phi} X_n) \end{aligned}$$

وهذا يقترح علينا كيف يمكن أن نحصل بطريقة أخرى على التنبؤ من النموذج المحول:

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_t^* + u_t^*$$

حيث أن:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\phi}Y_{t-1}$$

$$X_t^* = X_t - \hat{\phi}X_{t-1}$$

$$\beta_1^* = \beta_1(1 - \hat{\phi})$$

ثم إن التنبؤ بالقيمة Y_{n+1}^* يعطي بالعلاقة:

$$\hat{Y}_{n+1}^* = \beta_1^* + \hat{\beta}_2 X_{n+1}^*$$

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\phi}Y_n + \hat{\beta}_1(1 - \hat{\phi}) + \hat{\beta}_2(X_{n+1} - \hat{\phi}X_n)$$

وإذا أردنا التنبؤ أكثر من فترة واحدة، نبدأ بتنبؤ Y_{n+2} . فتقديم معادلة التنبؤ السابقة بفترة واحدة يعطي:

$$\hat{Y}_{n+2} = \hat{\phi}Y_{n+1} + \hat{\beta}_1(1 - \hat{\phi}) + \hat{\beta}_2(X_{n+2} - \hat{\phi}X_{n+1})$$

لكن Y_{n+1} تكون على العموم غير ملاحظة. وبالتالي هي نفسها تحتاج إلى أن ننتبأ بها لتعطي:

$$\hat{Y}_{n+2} = \hat{\phi}\hat{Y}_{n+1} + \hat{\beta}_1(1 - \hat{\phi}) + \hat{\beta}_2(X_{n+2} - \hat{\phi}X_{n+1})$$

وإذا إستعملنا تنبؤ Y_{n+1} المحصل عليه من قبل نجد:

$$\hat{Y}_{n+2} = \hat{\phi}^2 Y_n + \hat{\beta}_1(1 - \hat{\phi}^2) + \hat{\beta}_2(X_{n+2} - \hat{\phi}^2 X_n)$$

ونلاحظ أن المعلومات عن X_{n+1} غير مطلوبة للتنبؤ بالملاحظة Y_{n+2} ، ويكون التنبؤ بالملاحظة Y_{n+3} مباشرة هو:

$$\hat{Y}_{n+3} = \hat{\phi}^3 Y_n + \hat{\beta}_1(1 - \hat{\phi}^3) + \hat{\beta}_2(X_{n+3} - \hat{\phi}^3 X_n)$$

لنستنتج أن التنبؤ بالفترة j (حيث $j \geq 1$) في المستقبل يكون على

الشكل:

$$\hat{Y}_{n+j} = \hat{\phi}^j Y_n + \hat{\beta}_1(1 - \hat{\phi}^j) + \hat{\beta}_2(X_{n+j} - \hat{\phi}^j X_n)$$

والتي تتطلب معلومات عن القيمة X_{n+j} فقط، ولا تتطلب معلومات عن X في الفترات الأخرى.

4-6 سلسلة تمارين حول الفصل السادس

التمرين الأول:

لديك النموذج $Y_t = \beta X_t + u_t$ مع المعلومات التالية:

$$Y_t = \beta X_t + u_t$$

$$E(u_t) = 0, \quad E(u_t u_s) = 0, \quad t \neq s$$

$$E(u_t^2) = \sigma_u^2 X_t^2, \quad \sum X_t^2 = n, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

(a) أوجد مقدر المربعات الصغرى المعممة لـ β وتباينه.

(b) أوجد مقدر المربعات الصغرى العادية لـ β وتباينه.

(c) بين بأنه عند تطبيق المربعات الصغرى العادية على قانون التباين $\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$ تعطي في هذه الحالة مقدرًا متحيزًا سلبًا للتباين الحقيقي.

ملاحظة: إستعمل متراجحة Cauchy-Schwartz:

$$a_t = X_t^2, \quad b_t = 1 \quad \text{مع} \quad \sum a_t^2 \cdot \sum b_t^2 \geq (\sum a_t b_t)^2$$

(d) إذا كان النموذج أعلاه يتبع نظام المرتبة $AR(1)$ من الارتباط الذاتي على

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t; \quad t = 2, 3, \dots, 103 \quad \text{الشكل:}$$

ولديك القيم التالية:

	Y_t	X_t	Y_{t-1}	X_{t-1}
Y_t	150			
X_t	100	100		
Y_{t-1}	123	74	138	
X_{t-1}	82	75	92	90

فمثلاً لدينا من الجدول $\sum Y_t X_{t-1} = 82$ قدر β بواسطة المربعات

الصغرى العادية. قم قدر ϕ بواسطة العبارة:

$$\hat{\phi} = \sum \hat{U}_t \hat{U}_{t-1} / \sum \hat{U}_{t-1}^2$$

(e) إستعمل طريقة كوكران-أوركات في التكرار لتقدير موجه المعالم β في الإنحدار $Y_t = X_t'\beta + u_t$ لما تتبع الأخطاء نظام AR(2) المستقر .
(f) كيف يمكنك إختبار الفرضية:

$$H_0: \sigma_t^2 = \sigma_u^2$$

$$H_A: \sigma_t^2 = \exp(w_t'\delta)$$

في نموذج العلاقة (e) مع:

$$u_t \sim IN(0, \sigma_t^2) \quad , \quad t = 1, 2, \dots, n$$

(g) إذا كانت لدينا صيغة النموذج الخطي العام مع X غير عشوائية على الشكل:
 $Y = X\beta + U$
 $U \sim IN(0, \psi)$

بين صحة العبارة: $\text{var}(\hat{\beta})_{OLS} - \text{var}(\hat{\beta})_{GLS} \geq 0$ مع ملاحظة أن:

$$(X'\psi^{-1}X)^{-1} - (X'X)^{-1}X'P^{-1}PX(X'\psi^{-1}X)^{-1}X'P'(P')^{-1}X(X'X)^{-1}$$

التمرين الثاني:

لديك النموذج:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i; \quad i = 1, 2, \dots, 20$$

$$u_i \sim N(0, \exp(\alpha_1 + \alpha_2 Z_i))$$

وحصلنا على النتائج التالية:

$$(i) \log \hat{U}_i^2 = -1.22 + 0.1719Z_i$$

S.E (1.697) (0.07921)

$$(ii) \frac{\hat{U}_i^2}{\hat{\sigma}_u^2} = -0.8298 + 0.07998Z_i; \quad R^2 = 0.6214$$

$$(iii) \hat{Y}_i = 13.69 + 1.188X_{2i} + 0.7121X_{3i},$$

$i = 1, 2, \dots, 8, \quad RSS_1 = 49.6$

$$\hat{Y}_i = -24.8 + 2.444X_{2i} + 1.0961X_{3i},$$

$i = 13, 14, \dots, 20, \quad RSS_2 = 413.9$

$$\hat{\sigma}_u^2 = RSS/17$$

(a) مستعملا النتائج الثلاثة أعلاه، كون ثلاثة إختبارات لعدم تجانس تباينات الأخطاء، شارحا الفرضية المختبرة في كل حالة.

(b) في النموذج أعلاه، نكون المتغير $g_i = \hat{U}_i^2 / \tilde{\sigma}_u^2$ ، حيث أن \hat{U}_i^2 هي بواقي المربعات الصغرى العادية وكذلك $\tilde{\sigma}_u^2 = RSS/20$.

نحدر النموذج $g_i = \alpha_1 + \alpha_2 z_i$ بواسطة المربعات الصغرى لنجد أن $URSS=31.82$ ، $TSS=RRSS=51.73$. إستعمل هذه المعلومات لتشرح نتائجك من أجل إختبار Breusch-Pagan.

التمرين الثالث:

ليكن النموذج الخطي العام:

$$Y = X\beta + U$$

$$U \sim IN(0, \sigma_u^2 \psi)$$

وليكن مقدار المربعات الصغرى المعممة هو $\hat{\beta}_G$ مع البواقي $\hat{U}_G = Y - X\hat{\beta}_G$.

(a) بإستعمال النموذج المحول أثبت أن $\hat{\sigma}_{uG}^2$ هو مقدار غير متحيز لـ σ_u^2 .

(b) إذا كان $A_1 = I - X(X'\psi^{-1}X)^{-1}X'\psi^{-1}$ فبين أن: $\hat{U}_G = A_1U$.

(c) إذا كان $A_2 = \psi^{-1} - \psi^{-1}X(X'\psi^{-1}X)^{-1}X'\psi^{-1}$ فبين أن $A_1'\psi^{-1}A_1 = A_2$.

(d) أثبت أن: $\text{var}(Y - X\hat{\beta}_G) = \sigma_u^2 [\psi - X(X'\psi^{-1}X)^{-1}X']$.

(e) لنجزء النموذج أعلاه على الشكل: $X = [i \quad X.]$ ، $\beta' = [\beta_1 \quad \beta_2']$ بين بأن $\hat{\beta}_G$

يمكن كتابته على النحو:

$$\hat{\beta}_{1G} = (i'\psi^{-1}i)^{-1}i'[\psi^{-1}Y - (\psi^{-1}X.)\hat{\beta}_{2G}]$$

$$\hat{\beta}_{2G} = (X.'\psi X.)^{-1}X.'\psi Y$$

$$v = \psi^{-1} - [i'\psi^{-1}i]^{-1}\psi^{-1}ii'\psi^{-1} \quad \text{حيث أن:}$$

التمرين الرابع:

ليكن النموذج الخطي العام مع مصدر آخر لمعلومة إضافية حول موجه

المعالم للقيود الخطية على الشكل:

$$(1) \quad Y = X\beta + U: E(U) = 0, E(UU') = \sigma_u^2 I_n$$

$$(2) \quad r = R\beta + V: E(V) = 0, E(VV') = \Sigma$$

Σ مصفوفة متناظرة ومحددة موجبة، R هي $m \times k$ مصفوفة قيود وذات رتبة m . U و V خطآن عشوائيان موزعان إستقلاليا. ويكون النموذج المدمج:

$$(3) \quad \begin{pmatrix} Y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

(a) بين أن مقدار المربعات الصغرى المعممة للنموذج (3) هو:

$$\hat{\beta}_G = \left[\frac{1}{\sigma_u^2} X'X + R' \Sigma^{-1} R \right]^{-1} \left[\frac{1}{\sigma_u^2} X'Y + R' \Sigma^{-1} r \right]$$

(b) إذا كانت C ، D مصفوفتان محددتان موجبتان. تكون $C - D \geq 0$ إذا وفقط إذا كانت $D^{-1} - C^{-1} > 0$. أوجد $\text{var}(\hat{\beta}_G)$. ثم إستعمل هذا التعريف لتبين بأن المقدّر $\hat{\beta}_G$ كفؤ بالمقارنة مع $\hat{\beta}_{OLS}$.

(c) إذا كانت $X = [X_{1i} \ X_{2i}]$ ، $\beta' = [\beta_1 \ \beta_2]$ ، $E(u_i^2) = 1$ مع المعلومات:

$$X'X = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 20 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2\beta_1 + \beta_2 + V_1 \\ \beta_2 + V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

V_1 ، V_2 مستقلين عن u_i ، $i = 1, 2, \dots, 10$ ، كما أن:

$$E(V_1^2) = 1, \quad E(V_2^2) = 2, \quad E(V_1 V_2) = 1$$

أحسب مقدرات المربعات الصغرى العادية غير المقيدة للمعلمتين β_1 ، β_2 . وكذلك مصفوفة تباينهما المشترك. بإستعمال القيود السابقة مع معلومات العينة. أحسب مقدرات المربعات الصغرى المعممة والمقيدة. تأكد جبريا أنها فعلا كفؤة.

(d) إذا أصبحت $E(VV') = \sigma_v^2 I$ مع المعلومات التالية:

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad R'R = \begin{pmatrix} 25 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad R'r = \begin{pmatrix} 30 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \frac{\sigma_u^2}{\sigma_v^2} = 2$$

أحسب مقدر المربعات الصغرى العادية من (1) و (2) منفصلين. بين بأن مقدر النموذج (3) أكفؤ.

(e) إذا كانت في (d) σ_u^2/σ_v^2 غير معروفة. اقترح طريقة مناسبة تساعد على تطبيق قانون المربعات الصغرى المعممة. وماهي المعلومة الإضافية الضرورية لذلك. ماهي الخصائص المتوقعة لهذا المقدر.

(f) في (a) إذا كانت $E(UU') = \psi$ أعد تقدير $\hat{\beta}_G$.

(g) في (c) إذا كانت $E(u_i^2) = 2$ أعد نفس الأسئلة.

التمرين الخامس:

ليكن النموذج:

$$Y_t = \beta Y_{t-1} + u_t \quad |\beta| < 1$$

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t \quad |\phi| < 1$$

$$V_t \sim IN(0, \sigma_v^2)$$

(a) بين صحة العبارة $E(u_t Y_{t-1}) = \phi \sigma_u^2 / (1 - \phi\beta)$. وماأثر ذلك على مقدر المربعات الصغرى العادية لـ β .

(b) ليكن $\hat{\beta}$ هو مقدر المربعات الصغرى لـ β ، $\hat{\phi}$ هو مقدر ϕ من بواقي المربعات الصغرى، d هي إحصاءة داربين-واتسون. بين صحة العبارتين:

$$i) \quad p \lim(\hat{\beta} + \hat{\phi}) = \beta + \phi$$

$$ii) \quad p \lim d = 2 \left[1 - \frac{\phi\beta(\beta + \phi)}{1 + \beta\phi} \right]$$

ماهي الإنعكاسات التطبيقية لهذه النتائج.

(c) إذا أصبح نظام الارتباط الذاتي أعلاه على الشكل:

$$u_t = \phi u_{t-2} + V_t$$

أحسب التباين المشترك مابين u_t و Y_{t-2} .

(d) إذا أصبح النموذج أعلاه على الشكل: $Y_t = \beta Y_{t-1} + \gamma X_t + u_t$ مع AR(1) اشتق لوغاريتم دالة المعقولية العظمى مع إيجاد مصفوفة المعلومات المناسبة.

التمرين السادس:

في النموذج الخطي العام:

$$Y = X\beta + U$$

(a) إذا كانت لدينا $u_t = \phi u_{t-1} + V_t$ ، مع $V_t \sim N(0, \sigma_v^2)$. أوجد مصفوفة التحويل P ذات الأبعاد $(n-1) \times n$ والتي تحقق النتيجة $E(PUU'P') = \sigma_u^2 I_{n-1}$. ثم اشتق مقدرات β معتمدا في ذلك على النموذج المحول لما تكون ϕ معروفة. اشتق مقدار المعقولية العظمى وقارنه مع ذلك المحصل في المرحلة الأولى من السؤال.

(b) اشتق مقدار المعقولية العظمى للموجه β لما تكون:

$$u_t \sim IN[0, \sigma_u^2 (X_t' \beta)^2]$$

وما هو توزيعه التقاربي.

(c) إذا كان موجه الأخطاء أعلاه من الشكل: $\text{var}(u_t) = \sigma_t^2$. فاشتق إختبار LR من أجل الفرضية:

$$H_0: \sigma_t^2 = \sigma_u^2$$

$$H_A: \sigma_t^2 = \exp(w' \gamma)$$

(d) لنفرض أن الأخطاء أعلاه لها الشكل: $U \sim N(0, \sigma_u^2 \psi)$ ، حيث ψ مصفوفة متناظرة ومحددة موجبة. كما أن بعض أعمدة المصفوفة X مرتبطة مع U . استعمل أساسيات (تقنيات) التقدير بواسطة المربعات الصغرى المعممة والمتغيرات الأدواتية لتقترح مقدرات مناسبة لذلك.

(e) في النموذج الخطي العام أعلاه إذا كانت u_t تتبع نظام $AR(1)$ المستقر، و ϕ معروفة. طبق نظرية التنبؤ لتبين بأن:

$$\hat{Y}_{n+j} = X'_{n+j} \hat{\beta}_G + \phi^j \hat{U}_{NG}, \quad j \geq 1$$

$$\hat{U}_G = Y - X\hat{\beta}_G$$

(f) وإذا كانت u_t تتبع نظام السيرورة $MA(1)$ على الشكل:

$$u_t = V_t - \theta V_{t-1}$$

مع θ معروفة فبين أن:

$$\hat{Y}_{n+j} = X'_{n+j} \hat{\beta}_G: j > 1$$

(g) تحدث عن تقدير المعالم في النموذج:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_t + u_t$$

$$t = 1, 2, \dots, n$$

(i) لما u_t تكون سلسلة من المتغيرات العشوائية الموزعة إستقلاليا وتماثليا.

(ii) لما u_t تتبع نظام AR(1) المستقر.

الفصل السابع:

المتغيرات المؤخرة ونماذج توزيع التأخير

Lagged Variables and Distributed Lag Models

مقدمة:

إن النماذج المدروسة لحد الآن هي نماذج ساكنة الحركة. حيث أن المتغير التابع مأخوذ كدالة لمجموعة المتغيرات المفسرة والملاحظة في نفس الفترة الزمنية. نعتبر في هذا الفصل النماذج الموجهة لتوضيح تصرف المتغيرات الإقتصادية عبر الزمن، ومنه فإن إهتمامنا سوف يتقيد ببيانات السلاسل الزمنية. فالتشكيلات الحقيقية للعلاقات الإقتصادية تتطلب، غالباً، إدخال القيم المؤخرة للمتغيرات المفسرة. وكمثال بسيط للعلاقة الديناميكية، نأخذ الحالة التي يكون فيها الإستهلاك الحالي يعتمد على الدخل المؤخر بفترة واحدة مثل:

$$C_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + u_t: \quad t = 1, 2, \dots, n$$

إن نماذج توزيع التأخير (الموزعة بأجل) هي نماذج تحتوي على قيم مؤخرة للمتغيرات الخارجية أو المتغيرات الداخلية أو لكليهما معا عبر مجموعة المتغيرات المفسرة للنموذج. ويكون الشكل العام لنموذج توزيع التأخير والمحتوى على متغيرات مؤخرة خارجية فقط كمايلي:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_s X_{t-s} + u_t$$

نسمي المعادلة أعلاه بنموذج توزيع التأخير لأن أثر المتغير المفسر على المتغير التابع يكون موزعا عبر عدد من القيم السابقة والحالية لـ X . إن عدد التأخيرات أو الفترات، s ، يمكن أن يكون إما نهائيا أو غير نهائي. ولهذا، من أجل تفادي قيم مضخمة لـ Y_t ، نفترض أن المعالم β لها مجموع نهائي أي:

$$\sum_{i=0}^s \beta_i < \infty$$

في نموذج توزيع التأخير أعلاه، يمكننا الحصول على النموذج الساكن إذا كانت $\beta_0 \neq 0$ وبقيّة المعالم مساوية للصفر. تمثل المعالم β_i المشتقات الجزئية $\partial Y_t / \partial X_{t-i}$ والمجموعة الكلية للمعالم، $(i=0,1,2,\dots,s)$ ، تمثل كيفية رد فعل Y_t (تجاوب) لتغير في X موزعة عبر الزمن. ولا يوجد شرط مسبق لأن تكون المعالم β_i لها نفس الإشارة حيث يمكن لـ Y ، مبدئياً، أن يكون رد فعلها عكسياً لتغير X . أما لما تأخذ المعالم نفس الإشارة فمن المنطقي تعريفها إيجابياً. ولهذا، إذا كانت الزيادة في X تسبب إنخفاضا طويلاً المدى في Y ، نأخذ الإشارة السالبة خارج الجمع لكي تمثل المعالم β_i الترجيحات الموجهة في قياس أهمية فترات التأخير i . ومنه فإن القياس بواسطة التوزيعات الاحتمالية أو التوزيعات التكرارية النسبية يقترح مقاييس مثل وسط التأخير Mean Lag. إن وسط التأخير هو، ببساطة، معدل الترجيحات أو مرجحات التأخير، بحيث أن تأخير الفترة i يدخل مع الترجيح β_i أو مع الترجيح النسبي $\beta_i / \sum \beta_i$ مثل:

$$\begin{aligned} \text{وسط التأخير} = M.L &= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i\beta_i}{\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{\beta_i}{\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot w_i \\ w_i &= \frac{\beta_i}{\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i} \end{aligned}$$

حيث أن:

أما متوسط التأخير فيمثل عدد الفترات الزمنية الضرورية لكي يكون 50% من التعديل الإجمالي تاماً. أي أن متوسط التأخير هو عدد الفترات الزمنية الضرورية من أجل أن يكون التعديل الطويل المدى نصف كامل. يمكن لدالة توزيع التأخير أن تكون غير قابلة للتطبيق في الحياة العملية، من أجل عدد المعالم $s+1$ الواسع جداً. وتكون القيم المؤخرة عبر الزمن

للمتغيرات عبارة عن متغيرات مفسرة ومهمة في أغلب العلاقات الاقتصادية. لأن التصرف الاقتصادي لأية فترة ما، يكون محددا بكثير من التجارب السابقة ونتائج التصرف السابق. فمثلا، هناك نتائج حديثة لدالة الاستهلاك تشير إلى أن المستوى الحالي للاستهلاك يعتمد على المستويات السابقة لهذا الأخير بسبب "عادات المثابرة" *habit persistence*، على الدخل، الحالي والمستويات السابقة له وعوامل أخرى مثل:

$$C_t = f(C_{t-1}, C_{t-2}, Y_t, Y_{t-1}, \dots, X_{1t}, X_{2t}, \dots)$$

حيث أن C_t ، Y_t ، X_{1t} تمثل على التوالي الاستهلاك، الدخل ومتغيرات أخرى مثل الثروة أو مستوى المعيشة وغيرها.

مثلا ذكرنا من قبل، يوجد عامل التأخير في أغلب التصرفات الاقتصادية، حيث نعيش في عالم ديناميكي لتعديلات مستمرة. وبأخذ نظام التعديل مدة معينة، حيث تعتمد طول الفترة الزمنية للتعديل على طبيعة الظاهرة الخاصة بالدراسة. فعلى سبيل المثال، من المهم جدا للمسؤولين أو متخذي القرارات الرسمية معرفة السرعة التي سوف تتجاوب بها الوحدات الاقتصادية للتغيرات الناتجة في مختلف المتغيرات السياسية، أو ما هي سرعة تجاوب المستهلكين مع فرض ضريبة جديدة على المبيعات، أو ما هي سرعة تأثير عملية تخفيض العملة الوطنية أو ما هي السرعة اللازمة، التي يحتاجها المستثمرون للتعامل مع تغيرات معدلات الفائدة.

إن المتغيرات المؤخرة هي إحدى الطرق المستعملة للأخذ بعين الاعتبار طول الفترة الزمنية اللازمة في أنظمة التعديل للتصرف الاقتصادي. حيث أصبحت النماذج الديناميكية أكثر شعبية في أبحاث القياس الاقتصادي الحديثة. وتحتوي نماذج توزيع التأخير على درجة عالية لقابلية التجريب والاختبار. فالنظرية الاقتصادية، بالرغم من اعترافها بأهمية زمن التأخير، لا تقترح العدد الدقيق للتأخيرات الواجب إدخالها على الدالة. إن الأبحاث الميدانية للنماذج المحتوية على مختلف أنواع التأخير (والتي سيأتي ذكرها فيما بعد) تختار النوع الذي يعطي أحسن توافق ممكن بناءا على مبادئ المقاييس الإحصائية.

7-1 نماذج توزيع التأخير البسيطة

عمليا، نجد أنفسنا أمام نوعين من النماذج الديناميكية لتوزيع التأخير-

فمثلا:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + u_t \dots (7.1)$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \dots (7.2)$$

إن كلا النموذجين أعلاه، يحتوي على متغيرات مؤخرة لكن تعقيدات التقدير وفرضيات الاختبار تكون مختلفة لدى النموذجين. فإذا كانت ملاحظات X غير عشوائية بالمعادلة (1.7)، لا يوجد مشكل يذكر أثناء عملية التقدير. أما بالمعادلة (2.7)، فهما كانت الفرضية الموضوعية حول قيم المتغير Y ، فإنه لا يمكننا تطبيق الفرضيات الكلاسيكية (المعروفة) على هذا النموذج. إن المعادلة (1.7) هي مثال لنموذج توزيع التأخير. حيث إذا احتوى النموذج على متغير خارجي واحد (X)، مع تأخيرات من صفر إلى العدد s ، نسميها نموذج توزيع التأخير من المرتبة s ، Distributed Lag Model $DL(s)$. أما إذا حذفنا بعض التأخيرات مابين الصفر والعدد s ، نسمي هذا النموذج بنموذج توزيع التأخير المقيد Restricted Distributed Lag Model $RDL(s)$. أما إذا كان النموذج يحتوي على متغيرين خارجيين (X_{1t} ، X_{2t} ، مثلا)، مع مرتبة تأخيرات هي s_1 ، s_2 على الترتيب، نكتب نموذج توزيع التأخير المناسب لذلك على الشكل $DL(s_2, s_1)$ وغيرها.

إن المعادلة (2.7) هي حالة خاصة لنموذج توزيع تأخير الإنحدار الذاتي المقيد Restricted Autoregressive Distributed Lag Model (RADL). حيث نلاحظ في (2.7) أن مكونة الإنحدار الذاتي هي المرتبة الأولى، أما مكونة توزيع التأخير للمتغيرات الخارجية فهي المرتبة الصفر. ولهذا نقول عن نموذج (2.7) بأنه $RADL(1,0)$. وبالتالي فإن نموذج $RADL(1,0)$ ليس هو نفسه نموذج $AR(1)$ من أجل Y_t مادام هذا الأخير ليس له متغيرات خارجية على يمين المعادلة المعروفة. كما هو معروف، بينما الأول له متغير خارجي واحد هو X_t ، ظاهر مع تأخير

مساوي للصفر. أما نموذج توزيع التأخير للإحذار الذاتي غير المقيد، ADL، فيكتب عادة على الشكل $ADL(V, s_1, s_2)$ مثلاً. حيث V تمثل عدد التأخيرات للمتغير التابع Y_{t-j} ($j=0,1,2,\dots,V$)، و s_m, \dots, s_2, s_1 تمثل عدد التأخيرات للمتغيرات المفسرة الخارجية X_{kt-i} ، $k=1,2,\dots,m$ ، $i=0,1,2,\dots,s$.

مثال (1.7):

لنعتبر العلاقة البسيطة:

$$Y_t = \delta X_{t-2} + u_t$$

يكون، في هذه الحالة، أثر التغير في X واضحاً على Y فقط بعد إنقضاء فترتين زمنيتين. ومع هذا فإن المعادلة أعلاه، لا توضح تصرف النموذج الديناميكي مادام، كلما تبدأ X في التغير فإن أثرها الكامل على Y يحقق بسرعة. أما، لما ندخل عدة قيم مؤخرة لـ X في النموذج، فإن أي تغير في مستوى X سوف يعمل بالتدريج وعلى مراحل.

حيث إذا فرضنا أن:

$$Y_t = 0,7X_{t-1} + 1,3X_{t-2} + u_t$$

وكانت X تتحرك عند مستوى ثابت $E(X_t) = \bar{X}$ فإن:

$$E(Y_t) = 0,7\bar{X} + 1,3\bar{X} = 2\bar{X}$$

ومنه فإن الزيادة في مستوى X من \bar{X} إلى $\bar{X} + 1$ ، سوف يزيد من القيمة المتوقعة لـ Y بوحدين، ويحدث ذلك تدريجياً. حيث لا يوجد تغير فوري في القيمة المتوقعة لـ Y ، ولكن بعد فترة وفترتين بأخذ التعديل مكانه على الترتيب بالمقدار 35 %، 100 %. إن الأثر الكامل يتحقق بعد إنقضاء فترتين.

سوف نبدأ مع تحليل النماذج المحتوية على قيم تأخير للمتغيرات الخارجية فقط. ثم نوسع تحليلنا للنماذج المحتوية على قيم تأخير للمتغيرات الداخلية (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots) ضمن مجموعة المتغيرات المفسرة، ومن ثم نقترح طرق تقدير المعالم لنماذج التأخير.

2-7 متغيرات التأخير الخارجية Exogenous Lagged Variables

نفترض أن Y تعتمد على قيم X عبر s فترة زمنية في علاقة من الشكل:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_s X_{t-s} + u_t \dots (7.3)$$

عمليا ليست لدينا معلومات مسبقة حول طول فترة التأخير (s). ومنه يمكن

كتابة العلاقة (3.7) على الشكل:

$$Y_t = \alpha + D(L)X_t + u_t \dots (7.4)$$

حيث أن $D(L)$ هو كثير حدود من المرتبة s في عامل التأخير (L) أي أن:

$$D(L) = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_s L^s \dots (7.5)$$

فإذا بقيت X عند مستوى ثابت، وليكن \bar{X} ، كما في المثال (1.7) سابقا،

من أجل s فترة زمنية، فإنه ماعدا الأخطاء u_t ، سوف تصل Y عند قيمة التوازن (بعد s فترة) إلى النقطة \bar{Y} بحيث أن:

$$\bar{Y} = \alpha + D(1) \cdot \bar{X}$$

مع $D(1)$ تمثل قيمة كثير الحدود لما يكون عامل التأخير (L) معوضا بالواحد، وهو ببساطة مجموع المعالم β_i أي:

$$D(1) = \sum_{i=0}^s \beta_i$$

أما إذا تغيرت \bar{X} في الفترة الجارية بمقدار $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ ، فإن

Y سوف تعدل تدريجيا من \bar{Y} إلى توازن جديد. إن المعلمة β_0

($\beta_0 = \Delta Y_t / \Delta X_t = \partial Y_t / \partial X_t$) تمثل المضاعف الفوري (الآني) لـ X . بينما

المجاميع الجزئية للمعالم β_i تمثل المضاعفات الوسيطة (المرحلية) Interim

multipliers. وباشتقاق المعادلة (5.7) بالنسبة لعامل التأخير (L) نجد:

$$D'(L) = \beta_1 + 2\beta_2 L + \dots + s\beta_s L^{s-1} \dots (7.6)$$

ومنه يكون وسط التأخير على الشكل:

$$M.L = \sum_{i=0}^s i \cdot w_i = \frac{\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + s\beta_s}{\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s}$$

$$= \frac{D'(1)}{D(1)} \dots (7.7)$$

يمكن لعدد التأخيرات، s ، أن يكون كبيرا، ففي النموذج (3.7) نجد أن Y تتجاوب لتوفيق مختلف قيم X الخارجية (الحالية والمؤخرة إلى الفترة s). حيث إذا تغيرت X عند نقطة ما، نحدث التعديل s مرة لكي نصل إلى التعديل الكامل في Y والموافق لذلك التغير. يعرف هذا النوع من التجاوب بتوزيع التأخير النهائي، ويمكن كذلك إعادة صياغة المعادلة (4.7) على الشكل:

$$Y_t = \alpha + B(L) \cdot X_t + u_t \dots (7.8)$$

حيث أن:

$$B(L) = \beta_0 + \beta_1 L + \dots + \beta_s L^s \dots (7.9)$$

ومنه نقول أن الأثر النهائي (التجاوب الطويل المدى إلى s فترة) للمعادلة (3.7) من أجل تغير وحدة واحدة في المتغير الخارجي X هو $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s$. وإذا كتبنا معامل التجاوب الطويل المدى على الشكل:

$$\beta = \sum_{i=0}^s \beta_i = \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s$$

فإن معامل تجاوب التأخير الفوري يصبح:

$$\beta_i = w_i \beta, \quad i = 0, 1, 2, \dots, s$$

وبالتالي: $w_i = \beta_i / \beta$

ومنه، إذا كانت كل المعالم β_i لها نفس الإشارة، فإن الترجيحات w_i تكون غير سالبة ومحصورة مابين الصفر والواحد $0 \leq w_i \leq 1$ بحيث تحقق الشرط:

$$\sum_{i=0}^s w_i = 1$$

ليصبح وسط التأخير لنظام الترجيحات على الشكل:

$$M.L = \sum_{i=0}^s i \beta_i / \beta = \sum_{i=0}^s (i w_i) \dots (7.10)$$

لنستنتج أن القيمة الصغيرة لوسط التأخير، بالمعادلة (10.7)، تعني نسبيا أن التعديل في Y من أجل تغيرات X يعتبر سريعا. بينما القيمة الكبيرة لهذا المقياس تعني أن التجاوب كان بطيئا.

7-2-1 تقدير التأخيرات بواسطة المربعات الصغرى

إذا احتوى النموذج على متغيرات التأخير الخارجية، كما في المعادلة (3.7) فقط، نستطيع الاعتماد على الفرضيات الكلاسيكية المعروفة حول الأخطاء u_t مع X_t غير عشوائية و u_t لها التوزيع الطبيعي. وعند تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على عينة الملاحظات، هناك صعوبتان تظهران في هذا النوع من النماذج. أولا، إذا كان عدد التأخيرات كبيرا وعينة الملاحظات صغيرة نسبيا، يمكن ألا نستطيع تقدير المعالم. لأن عدد درجات الحرية يكون ضعيفا في حالة إجراء الاختبارات الإحصائية حول معنوية المقدرات. ثانيا، سوف نواجه مشكل التعدد الخطي لأننا نتوقع ارتباطا قويا مابين القيم المتتالية لنفس المتغير الخارجي. ففي هذه الحالة تكون قيم المقدرات غير دقيقة، وتكون أخطاءها المعيارية كبيرة. وبالتالي سوف نواجه مشكل خطأ التخصيص للنموذج بواسطة حذف متغيرات، كما لاحظنا ذلك بالفصل الرابع عند مناقشتنا لمشكل التعدد الخطي. ولتفادي هذه المشاكل هناك عدة طرق اقترحت لتخفيض عدد المتغيرات المؤخرة وهذا عن طريق إدخال قيود على المعالم β_i وتكوين متغيرات جديدة، نسميها ترجيحات، w_i من تشكيلة خطية للمتغيرات المؤخرة. وتختلف هذه الطرق في كيفية إدخال هذه القيود (الترجيحات) على المعالم β_i . فمن أبسط هذه الطرق نجد طريقة التقدير بواسطة إدخال قيم إعتباطية على الترجيحات w_i . فمثلا، إذا أخذنا نظام التأخير التنازلي بحيث تكون قيم الترجيحات القريبة لـ X لها أثر أكبر على المتغير التابع Y من تلك البعيدة لـ X . وإذا كانت $s=4$ نجد أن:

$$w_t = w_0 X_t + w_1 X_{t-1} + w_2 X_{t-2} + w_3 X_{t-3} + w_4 X_{t-4}$$

حيث أن:

$$w_0 > w_1 > w_2 > w_3 > w_4$$

أي أن:

$$w_i > w_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

وكمثال على ذلك نأخذ:

$$w_t = \frac{1}{3}X_t + \frac{1}{5}X_{t-1} + \frac{1}{6}X_{t-2} + \frac{1}{8}X_{t-3} + \frac{1}{10}X_{t-4}$$

2-2-7 تقدير كثير الحدود لنظام Almon

إن أهم طريقة للتعامل مع التعدد الخطي وعدم دقة قيم مقدرات المعالم المشار إليها أعلاه هو تخفيض عدد المحدرات (المعالم) المطلوب تقديرها بواسطة فرض نظام معين على المعالم β_i . ويقترح نظام تأخير كثير الحدود لـ Almon (1965) طريقة مرنة لتخفيض المعالم في نموذج المعادلة (3.7) مع حذف الحد الثابت. حيث تحت هذا النظام نسقط الطريقة المباشرة لتقدير كل المعالم $(s+1)$ لـ β_i ، ونفرض بالمقابل أن المعالم β_i يمكن تقريبها بواسطة الدالة:

$$\beta_i \approx f(i): \quad i = 1, 2, \dots, s$$

حيث يكون نموذج التأخير في (3.7) نهائي ويحتوي متغيرات التأخير الخارجية فقط. وتكون الدالة $f(i)$ غير معرفة إذا لم نضع أية فرضيات مسبقة حول شكلها. ومنه نعمم الدالة $f(i)$ بواسطة كثير الحدود في i من الدرجة r لنجد:

$$f(i) = a_0 + a_1i + a_2i^2 + \dots + a_r i^r$$

وطور Almon طريقة عامة لتقدير الدالة $f(i)$ والتي لها عدة عيوب (1) وفقا للخطوات التالية:

(1) نعين درجة كثير الحدود r ، وعدد التأخيرات s وعادة يكون r مساو للعدد 3 أو 4. إذا كانت درجة كثير الحدود عالية جدا لانستطيع الحصول على تخفيض لعدد المعالم الواجب تقديرها من العينة.

1- أنظر (مرجع سابق) Koutsoyannis 1977 Chap 13 page 300.

(2) نعبر عن المعالم β'_i بدلالة a_j ($j=0,1,2,\dots,r$) لتقريبات كثير الحدود، وذلك بوضع قيم i على التوالي $i=0, i=1, \dots, i=s$. لنحصل على النظام:

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= f(0) = a_0 \\ \beta_1 &= f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_r \\ \beta_2 &= f(2) = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 + \dots + 2^r a_r \\ \beta_3 &= f(3) = a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + 3^3 a_3 + \dots + 3^r a_r \\ &\vdots \\ \beta_s &= f(s) = a_0 + sa_1 + s^2 a_2 + s^3 a_3 + \dots + s^r a_r \end{aligned} \right\} \dots (7.11)$$

نسمي المعالم β_i ($i=0,1,\dots,s$) والمعبر عنها بدلالة a_j في العبارة (11.7) "بنظام المعالم β ". حيث إذا عرفنا قيم a_j نستطيع الحصول على قيم المعالم β_i بواسطة التعويض في (11.7) أعلاه. ويمكن تلخيص العلاقة (11.7) على الشكل:

$$\beta_i = \sum_{j=0}^r i^j \cdot a_j \dots (7.12a)$$

$$j = 0, 1, \dots, r$$

$$i = 0, 1, \dots, s$$

لنكتب المعادلة (12a.7) في شكل مصفوفات:

$$\beta = W \cdot a \dots (7.12b)$$

حيث أن:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}_{(s+1) \times 1}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s & s^2 & \dots & s^r \end{bmatrix}_{(s+1) \times (r+1)}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}_{(r+1) \times 1} \dots (7.12c)$$

(3) وبتعويض (11.7) في (3.7) نجد:

$$\begin{aligned}
 Y_t = & \alpha + a_0 X_t + (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_r) X_{t-1} \\
 & + (a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \dots + 2^r a_r) X_{t-2} \\
 & + (a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + \dots + 3^r a_r) X_{t-3} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + (a_0 + sa_1 + s^2 a_2 + \dots + s^r a_r) X_{t-s} + u_t
 \end{aligned}
 \quad \dots (7.13)$$

وبإعادة ترتيب المعادلة (13.7) نجد:

$$\begin{aligned}
 Y_t = & \alpha + a_0 (X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + \dots + X_{t-s}) \\
 & + a_1 (X_{t-1} + 2X_{t-2} + 3X_{t-3} + \dots + sX_{t-s}) \\
 & + a_2 (X_{t-1} + 2^2 X_{t-2} + 3^2 X_{t-3} + \dots + s^2 X_{t-s}) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + a_r (X_{t-1} + 2^r X_{t-2} + 3^r X_{t-3} + \dots + s^r X_{t-s}) + u_t
 \end{aligned}
 \quad \dots (7.14)$$

وإذا كتبنا النظام (14.7) على الشكل:

$$Y_t = \alpha + a_0 w_0 X_0 + a_1 w_1 X_1 + a_2 w_2 X_2 + \dots + a_r w_r X_r + u_t \dots (7.15)$$

فيكون من الواضح أن العبارات داخل الأقواس للنظام (14.7) تمثل المصفوفة XW والظاهرة بالمعادلة (15.7). ومنه عند تحديد Y في XW والحد الثابت (أو الموجه i) نحصل على المقدرات \hat{a}_j و $\hat{\alpha}$ على الترتيب، $j=0,1,\dots,r$. لنعد من جديد للمعادلة (12.7) ونعوض هذه المقدرات في شكل موجه \hat{a} لنجد:

$$\hat{\beta} = W \cdot \hat{a} \dots (7.16)$$

أو بإستعمال العبارة:

$$\hat{\beta}_j = \sum_{j=0}^r i^j \hat{a}_j, \quad i = 0,1,2,\dots,s \dots (7.17)$$

ومنه يمكن إعادة كتابة المعادلة (3.7) في شكل مصفوفات:

$$Y = i\alpha + X\beta + U$$

وباستعمال المعادلة (7.12b) نجد:

$$Y = i\alpha + Xwa + U = \begin{bmatrix} i & Xw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ a \end{bmatrix} + U \dots (7.18)$$

إن تطبيق قانون المربعات الصغرى العادية على (18.7) يعطي المقدرات المناسبة لكل من α و a على الشكل:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{a} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} i'i & i'Xw \\ w'X'i & w'X'Xw \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i'Y \\ w'X'Y \end{bmatrix} \dots (7.19)$$

وبناء على قانون التباين (بالفصل الثالث) نجد:

$$\text{var}(\hat{a}) = \sigma_u^2 [w'X'M_0Xw]^{-1} \dots (7.20)$$

حيث أن:

$$M_0 = I - i(i'i)^{-1}i'$$

وبالعودة إلى المعادلة (16.7) نجد:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}) &= w \text{var}(\hat{a}) w' \\ &= \sigma_u^2 w [w'X'M_0Xw]^{-1} w' \dots (7.21) \end{aligned}$$

مثال (2.7):

نفرض أن عدد التأخيرات هو $(s=0,1,2,\dots,5)$ ، ودرجة كثير الحدود هي $(r=0,1,\dots,3)$ ليكون نموذجنا الأول هو:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \dots + \beta_5 X_{t-5} + u_t \dots (7.22)$$

ثم نجد تقريبات كثير الحدود:

$$\begin{aligned} \beta_i &= f(i) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 \\ i &= 0, 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

حيث تكون هذه التقريبات "لنظام المعالم β_i " على الشكل:

$$\beta_0 = f(0) = a_0$$

$$\beta_1 = f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$\beta_2 = f(2) = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3$$

$$\beta_3 = f(3) = a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + 3^3 a_3$$

$$\beta_4 = f(4) = a_0 + 4a_1 + 4^2 a_2 + 4^3 a_3$$

$$\beta_5 = f(5) = a_0 + 5a_1 + 5^2 a_2 + 5^3 a_3$$

وبتعويض هذا النظام الأخير في المعادلة (22.7) وإعادة الترتيب تعطي:

$$\left. \begin{aligned} Y_t &= \alpha + a_0 (X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + \dots + X_{t-5}) \\ &+ a_1 (X_{t-1} + 2X_{t-2} + \dots + 5X_{t-5}) \\ &+ a_2 (X_{t-1} + 2^2 X_{t-2} + \dots + 5^2 X_{t-5}) \\ &+ a_3 (X_{t-1} + 2^3 X_{t-2} + \dots + 5^3 X_{t-5}) + u_t \end{aligned} \right\} \dots (7.23)$$

وبالتالي فإن 4 محدرات جديدة تشكلت كتوفيقات خطية لقيم X المؤخرة.

حيث أن تحدير Y في هذه المتغيرات الموجودة ما بين قوسين، يعطي المقدرات \hat{a}_j

($j=0,1,2,3$) والتي بدورها تعطي المقدرات $\hat{\beta}_i$ ($i=0,1,\dots,5$). وتكون مصفوفة

الترجيحات في هذا المثال على الشكل:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \end{bmatrix}$$

حيث أن w ، ذات الأبعاد $(s+1)(r+1)$ ، تعني أننا أستخدمنا كثير الحدود من

المرتبة الخامسة وبتقريب من الدرجة الثالثة لنحصل على المصفوفة المطلوبة في

الترجيح. ومنه، بناء على المعادلة (18.7)، نحدر Y في $[i \quad Xw]$ لنحصل على

المقدرات \hat{a}_j و $\hat{\alpha}$ ، ثم نعوضها بالمعادلة:

$$\hat{\beta} = w\hat{a}....(7.24)$$

نحصل على المقدرات $\hat{\beta}_i$ بالنموذج الأصلي (22.7). ونقول أنه بواسطة طريقة تأخير نظام Almon أستطعنا الحصول على المقدرات \hat{a}_j من العينة عوضا عن المقدرات الستة $\hat{\beta}_i$ ($i=0,1,...,5$) والتي نكون مضطرين لحسابها لو طبقنا طريقة المربعات الصغرى العادية مباشرة على النموذج الأصلي. وتكون لهذه الطريقة عدة مزايا من حيث سهولة الحساب وغيرها (2). حيث يقترح Almon كما أشرنا بأن يكون $r \leq s$ ومنه يكون لدينا $s+1$ مجاهيل في المعادلة الأصلية، بينما يصبح لدينا $r+1$ مجاهيل في المعادلة المحولة. وهذا يعني أن $s-r$ قيود أدخلت على النموذج، وفي مثالنا (2.7) تكون $s-r=2$. ومنه يمكن كتابة مثلا (23.7) على الشكل:

$$\hat{\beta}_R = w\hat{a}$$

أو:

$$\hat{\beta}_{iR} = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3(7.25)$$

$$i = 0,1,...,5$$

حيث أن $\hat{\beta}_{iR}$ تعني مقدار المربعات الصغرى المقيدة. ولهذا يمكن القول بأن استعمال العلاقة (24.7) يعطي مقدرات مقيدة. وإذا كان التقدير المعتمد على المعادلة (23.7) له مجموع مربعات بواقي مقيدة $RRSS$ ، والتقدير المعتمد على المعادلة (22.7) له مجموع مربعات بواقي غير مقيدة $URSS$ ، فإن اختبار صحة القيود المستلزمة يمكن أن يكون على الشكل:

$$\phi = \frac{(RRSS - URSS)/(s - r)}{URSS/(n - k)} \sim F_{s-r, n-k}$$

حيث أن k هو عدد المعالم في النموذج غير المقيد (22.7)، $k=s+2=7$ ، بينما $s-r=2$.

2- أنظر: i) J. Johnston "Econometric Methods" 1972 Page 297

ii) Koutsoyannis "Theory of Econometrics" 1977 Page 303

(مرجعين سابقين).

3-7 متغيرات التأخير الداخلية Endogenous Lagged Variables

يمكن كتابة النموذج العام (والممثل للمعادلتين (1.7)، (2.7)) على الشكل:

$$Y_t - a_1 Y_{t-1} - a_2 Y_{t-2} - \dots - a_p Y_{t-p} = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \dots + \beta_s X_{t-s} + u_t \dots (7.26)$$

أو بصيغة أخرى:

$$A(L)Y_t = \alpha + B(L)X_t + u_t \dots (7.27)$$

حيث أن $A(L)$ و $B(L)$ هما كثيري حدود على النحو:

$$A(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p \dots (7.28)$$

$$B(L) = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_s L^s \dots (7.29)$$

إن شروط الإستقرار بالنسبة لنموذج توزيع التأخير للإنحدار الذاتي $ADL(p,s)$ بالمعادلة (26.7) أو (27.7) تكون معقدة بشكل أكثر من نموذج الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى $AR(1)$. حيث أن إستقرار هذه المعادلة (28.7) يفرض شرطا على المعالم a_i والمعبر عنها في شكل جذور لكثير الحدود $A(L)$ ، والواجب أن تكون خارج دائرة الواحد. حيث يكون الشرط الضروري وغير الكافي هو أن $\sum_{i=1}^p a_i < 1$ ، والشرط الكافي فيحتوي على جذور للمعادلة المميزة والمتناسبة مع $A(L)$ ، كما أشرنا لذلك، أي أنه من أجل الإستقرار فإن كل القيم μ الموافقة للعلاقة:

$$A(\mu) = 1 - a_1 \mu - a_2 \mu^2 - \dots - a_p \mu^p = 0$$

يجب أن تقع "خارج دائرة الواحد" (والتي تعني أنها حقيقية أو مركبة). أي أن تكون هذه الجذور أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة. ويمكن إعادة كتابة المعادلة (27.7) على الشكل:

$$Y_t = \frac{\alpha}{A(L)} + \frac{B(L)}{A(L)} X_t + V_t \\ = \alpha' + D(L)X_t + V_t \dots (7.30)$$

حيث أن:

$$V_t = u_t / A(L)$$

$$\alpha' = \alpha / A(L)$$

وبالمقارنة مع المعادلة (4.7) نلاحظ أن:

$$D(L) = B(L) / A(L) \dots (7.31)$$

وإذا أخذنا شروط إستقرار نموذج توزيع التأخير للإتحاد الذاتي من المرتبة الأولى مثلا على الشكل $ADL(1,1)$ فإن:

$$A(L) = 1 - a_1 L$$

$$B(L) = \beta_0 + \beta_1 L$$

وبالتالي فإن قيمة μ التي تحقق $1 - a_1 \mu = 0$ يجب أن تكون خارج دائرة الواحد أو أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة أي $|\mu| > 1$ والتي تعني أن $|a_1| < 1$. ومنه يكون معامل التجاوب الطويل المدى للمعادلة (26.7) على الشكل:

$$D(1) = \frac{B(1)}{A(1)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s}{1 - a_1 - \dots - a_p}$$

أما بالنسبة للمرتبة الأولى من نظام $ADL(1,1)$ ، فإننا نكتب:

$$D(1) = \frac{B(1)}{A(1)} = \frac{\beta_0 + \beta_1}{1 - a_1}$$

ويمكن اشتقاق وسط التأخير من كثيري الحدود $A(L)$ ، $B(L)$ مادام:

$$D(L) = B(L) / A(L)$$

$$\frac{D'(L)}{D(L)} = \frac{B'(L)}{B(L)} - \frac{A'(L)}{A(L)} \quad \text{فإن:}$$

ليكون في الأخير:

$$M.L = \frac{B'(1)}{B(1)} - \frac{A'(1)}{A(1)} \dots (7.32)$$

وبناء على المعادلة (32.7)، يكون وسط التأخير لنظام $ADL(1,1)$ هو:

$$M.L = \frac{\beta_1}{\beta_0 + \beta_1} - \frac{-a_1}{1 - a_1} = \frac{a_1 \beta_0 + \beta_1}{(1 - a_1)(\beta_0 + \beta_1)}$$

7-3-1 نظام التأخير الهندسي لـ Koyck:

يعتبر نظام Koyck من أشهر نماذج توزيع التأخير في الأبحاث الميدانية. حيث أن التبسيط المدخل من طرف هذا الباحث في عمله "Distributed Lags and Investment" سنة 1954 كانت له نتائج فورية وتوصل إلى معادلة إحدار قابلة للتقدير. حيث يفترض بأن المعالم تنخفض بطريقة مستمرة، متبعة نظام متوالية هندسية. ويحتوي النموذج الأصلي على المتغيرات المؤخرة الخارجية فقط. ومنه إذا كتبنا:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + u_t \dots (7.33)$$

حيث أن:

$$u_t \sim \text{NID}(0, \sigma_u^2)$$

$$E(u_i u_j) = 0, \quad i \neq j$$

$$E(u_i X_j) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

ويستلزم نظام التأخير الهندسي لـ Koyck بأن القيم القريبة لـ X لها أثر كبير على Y من القيم البعيدة لـ X . تنخفض المعالم في هذا النموذج في شكل متوالية هندسية:

$$\beta_i = \lambda^i \beta_0 \dots (7.34)$$

$$0 < \lambda < 1, \quad 0 \leq i < \infty$$

حيث أن λ ، β_0 ثوابت. كما أن الشرط $0 < \lambda < 1$ يضمن لنا أن المعالم β_i تتقارب تمهيداً إلى الصفر. ومنه فإن هذه المعالم β_i هي دوال لمعلمتين فقط، (λ, β_0) ، وتكون معادلة توزيع التأخير هي:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + (\lambda \beta_0) X_{t-1} + (\lambda^2 \beta_0) X_{t-2} + \dots + u_t$$

$$Y_t = \alpha + \beta_0 [X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \dots] + u_t \dots (7.35)$$

بالنظر في المعادلة (35.7)، يكون المضاعف الفوري، الذي يقيس الأثر المباشر لـ X في Y ، هو β_0 والمضاعف الطويل المدى، الذي يقيس التغير في المدى الطويل لقيمة Y الناتجة عن زيادة وحدة واحدة في مستوى X ، مساوي إلى:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i = \beta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \beta_0 / (1 - \lambda)$$

أما وسط التأخير فيعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} M.L &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot w_i = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{\beta_i}{\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{\lambda^i}{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i} \end{aligned}$$

ولحساب ذلك بدلالة β_0 و λ ، نحتاج أولاً إلى تقييم العبارة:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \lambda^i = \lambda + 2\lambda^2 + 3\lambda^3 + 4\lambda^4 + \dots$$

نضرب الطرفين بواسطة λ لنجد:

$$\lambda S = \lambda^2 + 2\lambda^3 + 3\lambda^4 + 4\lambda^5 + \dots$$

ثم نطرح لنجد:

$$S - \lambda S = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots$$

إن العبارة الأخيرة تمثل سلسلة لمتوالية هندسية بمجموع هو:

$$S - \lambda S = \lambda / (1 - \lambda)$$

$$S = \lambda / (1 - \lambda)^2 \quad \text{لتصبح:}$$

وبالتالي يكون وسط التأخير:

$$M.L = \frac{\lambda / (1 - \lambda)^2}{1 / (1 - \lambda)} = \lambda / (1 - \lambda)$$

ويظهر أن فرضية توزيع التأخير الهندسي تساعد على تقدير معادلة إحداد لبيانات عينة نهائية، لأن الماضي غير النهائي لسلسلة X يبقى ظاهراً في الطرف الأيمن للمعادلة. وللتبسيط أكثر ندخل تحويلات Koyck. حيث في الزمن t لدينا:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 [X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \dots] + u_t$$

وفي الفترة الزمنية $(t-1)$ لدينا:

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta_0 [X_{t-1} + \lambda X_{t-2} + \lambda^2 X_{t-3} + \dots] + u_{t-1}$$

نضرب المعادلة الأخيرة (في الفترة $t-1$)، بـ λ ثم نطرحها من معادلة الفترة t . إن كل شيء يضمحل، ماعدا الحد الثابت، الحد المحتوي على X_t وحد الأخطاء، لنتحصل على نموذج مبسط على الشكل:

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = \alpha(1 - \lambda) + \beta_0 X_t + (u_t - \lambda u_{t-1})$$

أو على الشكل:

$$Y_t = \alpha' + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + V_t \dots (7.36)$$

حيث أن:

$$V_t = u_t - \lambda u_{t-1}$$

$$\alpha' = \alpha(1 - \lambda)$$

إن العدد اللامتناهي لسلسلة X إضمحل، وحصلنا على معادلة نهائية يمكن تقدير معالمها بإحدى طرق التقدير المعروفة. ويمكن الحصول على عبارة لمضاعف المدى الطويل مباشرة من المعادلة (36.7). حيث نفرض أن X لها قيمة ثابتة عبر الزمن. ثم بمجرد إتمام تعديلات التأخير في المدى الطويل، تكون قيمة Y ثابتة كذلك. إن العلاقة ما بين هذه القيم التوازنية لـ X و Y سوف تعرف، في المدى البعيد، بواسطة:

$$Y^e = \alpha(1 - \lambda) + \beta_0 X^e + \lambda Y^e$$

لنجد أن:

$$Y^e = \alpha + \frac{\beta_0}{(1 - \lambda)} \cdot X^e$$

حيث تمثل معلمة قيمة التوازن $\beta_0 / (1 - \lambda)$ لـ X^e المضاعف الطويل المدى.

إذا أسقطنا الحد الثابت بالمعادلة (33.7)، فإنه يمكن إعادة كتابة نموذج توزيع التأخير الهندسي لـ Koyck على الشكل:

$$Y_t = \beta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{t-i} + u_t \dots (7.37)$$

والذي يمكن تحويله إلى الشكل:

$$Y_t = \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + V_t$$

هناك نظام توزيع التأخير لتحويل Koyck، المطور، حيث نحدد واحدا أو اثنين من التأخيرات البدائية (الأولية) مباشرة من الدالة الأصلية "تأخيرات حرة"، ثم نسمح لبقية التأخيرات بالإنخفاض هندسيا. فمثلا، إذا أردنا تحديد التأخيرين الأوليين بحرية من النموذج وبقية التأخيرات نتركها تنخفض هندسيا، يكون نموذجنا الأصلي على الشكل:

$$Y_t = \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + [\beta_2 X_{t-2} + (\beta_2 \lambda) X_{t-3} + (\beta_2 \lambda^2) X_{t-4} + \dots] + u_t$$

أو على الشكل:

$$Y_t = \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{t-i-2} + u_t$$

ليكون نموذج تأخير Koyck المحول والمطور هو:

$$Y_t = \beta_0 X_t + (\beta_1 - \lambda \beta_0) X_{t-1} + (\beta_2 - \lambda \beta_1) X_{t-2} + \lambda Y_{t-1} + V_t$$

حيث أن: $V_t = u_t - \lambda u_{t-1}$

إن العبارة النهائية لنموذج Koyck تحتوي على القيمة التأخيرية Y_{t-1} للمتغير الداخلي في مجموعة المحدرات. بالرغم من أن نموذج التأخير الهندسي لـ Koyck يتفادى عدة مشاكل منها، الوصول إلى أحسن إقتصاد في درجات الحرية، وتفادي مشكل التعدد الخطي إلى درجة (مستوى) معينة [مادام Y_{t-1} تكون على العموم أقل ارتباط مع X_t من القيم المتتالية لـ X_{t-i}]، فإن وجود Y_{t-1} مع مجموعة المتغيرات المفسرة له عدة نتائج سلبية. ومن بين هذه العيوب، تكون التشكيلة الجديدة للأخطاء $V_t = u_t - \lambda u_{t-1}$ مرتبطة ذاتيا وتصبح Y_{t-1} غير مستقلة عن حد الأخطاء الجديدة V_t لأن: $E(V_t Y_t) \neq 0$

وكذلك $E(V_t Y_{t+s}) \neq 0$ من أجل $s \geq 0$ وكل t . ثم إن مقدرات المربعات الصغرى، تصبح متحيزة وغير متسقة في العينات الكبيرة، ويستحيل تطبيق الإحصاءة d الخاصة بداربين-واتسون. بل نكون مضطرين لإستعمال الإحصاءة h لداربين والمذكورة بالفصل السادس.

2-3-7 فرضية التعديل الجزئي Partial Adjustment Hypothesis

لتفادي مشاكل التقدير الناتجة عن فرضية التأخير لـ Koyck، اقترح Nerlove 1958 نظاما آخرًا لتعميم المتغيرات التابعة والمؤخرة ضمن مجموعة المحدرات وهو نموذج التعديل الجزئي المعتمد على فرضيات تصرفية مختلفة. ولنعبر الآن ما هو نوع التصرف بواسطة المتعاملين الإقتصاديين الذي يمكن أن يتماشى مع توزيع التأخير. حيث نوضح في هذه الفقرة فرضية التعديل الجزئي أو فرضية تعديل المخزون. لنفرض أن هناك مستوى مخطط لبعض المتغيرات التي يأمل المتعاملون الإقتصاديون الوصول إليه في الفترة الزمنية t ، والذي يعتمد على قيمة X في الفترة t . حيث تمثل ذلك المستوى المفضل بالقيمة Y_t^* ، فمثلا، يمكن أن تمثل مخزون رأس المال الأمتل لمؤسسة ما مع فرض وجود احتكاكات وتكاليف القيام بأعمال وغيرها. يكون من الصعب الوصول إلى هذا المستوى المفضل في فترة زمنية واحدة. حيث، إذا بحثنا في التكوينات الحديثة لنظرية الإستثمار، بالنسبة لرأس المال الثابت، نلاحظ أنها تعتمد على ما يعرف بإسم "مبدأ تعديل المخزون". حيث يظن المستثمر أن المستوى المفضل من مخزون رأس المال Y_t^* يكون صحيحا من أجل تمهيد نظام الإنتاج، دون أن يفوق الطاقة الإنتاجية. ويحدد المستوى المفضل لمخزون رأس المال بواسطة مستوى الإنتاج X_t كمايلي:

$$Y_t^* = \alpha + \beta X_t + u_t \dots (7.38)$$

لا يمكن قياس هذا النموذج، لأن الكمية المفضلة، Y_t^* ، غير ملاحظة. ولتعويضها يجب إفتراض بعض التصرف في مجموعة القوانين الخصوصية من أجل إتخاذ القرار المناسب من طرف مؤسسة الإستثمار. إن "مبدأ تعديل المخزون" يتطلب بأن

يكون التغير المحقق في مخزون رأس المال في أية فترة زمنية هو نسبة من التغير المفضل فقط (3). ولننطلق من المستوى الموجود سابقا، Y_{t-1} ، حيث يكون التغير المطلوب للوصول إلى المستوى المفضل هو $Y_t^* - Y_{t-1}$ ، ولكن التغير الحالي $Y_t - Y_{t-1}$ هو جزء فقط من ذلك. ولنفرض أن النسبة المتوصل إليها هي γ حيث $0 \leq \gamma \leq 1$. ونمثل فرضية التعديل الجزئي على النحو:

$$Y_t - Y_{t-1} = \gamma(Y_t^* - Y_{t-1}) + V_t \dots (7.39)$$

$$Y_t = (1 - \gamma)Y_{t-1} + \gamma Y_t^* + V_t \quad \text{أو:}$$

حيث أن $Y_t - Y_{t-1}$ هي التغير الحالي في مخزون رأس المال (الإستثمار المحقق في الفترة t)، و $Y_t^* - Y_{t-1}$ هي التغير المفضل في رأس المال (الإستثمار المفضل، أما γ فهي معامل التعديل الجزئي).

نفهم من المعادلة (39.7) أن ما يحقق بواسطة المؤسسة في فترة تغير واحدة $(Y_t - Y_{t-1})$ في مخزون رأس المال هو فقط نسبة من التغير المفضل $(Y_t^* - Y_{t-1})$. إن القيم الكبيرة لمعامل التعديل الجزئي، γ ، تستلزم نسبيا أن التعديل يكون سريعا، وإذا كانت $\gamma = 1$ فإن التعديل يكون كاملا (وليس جزئيا) في فترة واحدة، ليكون صافي الإستثمار هو:

$$I_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t^* - Y_{t-1} + V_t$$

أما القيم الصغيرة لـ γ ، فتستلزم أن القيمة الماضية للمتغير تمثل أثرا كبيرا. وإذا كانت $\gamma = 0$ فلا شيء يتغير. ومنه، إذا كانت البيانات متوفرة، فإن المعادلة (39.7) يمكن تقديرها. لكن عمليا، من المستبعد أن يحدث ذلك، حيث عادة، ما يطلب النموذج الإقتصادي شرحا وافيا من أجل تحديد قيمة Y_t^* غير المشاهدة. فمثلا مخزون رأس المال الأمثل (المفضل) لمؤسسة ما، يمكن أن يعتمد على أسعار مدخلاته وعوامل الإنتاج التي يمكن مشاهدتها. وبتعويض المعادلة (38.7) في معادلة التعديل الجزئي (39.7) نحصل على ما يلي:

³ - أنظر:

Rudiger Dornbush and Stanley Fisher "Macroeconomics", Chap 12, Sixth edition, International Edition, New York 1994.

$$Y_t - Y_{t-1} = \gamma[\alpha + \beta X_t + u_t - Y_{t-1}] + V_t$$

وبالترتيب نجد:

$$Y_t = \gamma\alpha + \gamma\beta X_t + (1 - \gamma)Y_{t-1} + (V_t + \gamma u_t) \dots (7.40)$$

تعني المعادلة (40.7) أن مخزون رأس المال في فترة واحدة t يعتمد على مستوى الإنتاج في تلك الفترة، وجزئيا على رأس المال الموجود في بداية الفترة. وهي بنفس شكل المعادلة التقديرية المحصلة في ظل فرضية توزيع التأخير الهندسي لـ Koyck. إن التشابه في هذه المعادلة مع نموذج تحويل Koyck واضح، فكلا النموذجين يحتوي على نفس المتغيرات (Y_t, X_t, Y_{t-1}) ، لكن حد الأخطاء في "نموذج التعديل الجزئي" $(V_t + \gamma u_t)$ ، لا يحتوي على نظام الارتباط الذاتي للأخطاء u_t مثلما هو موجود بنموذج تحويل Koyck $(u_t - \lambda u_{t-1})$. حيث أنه في نموذج التعديل الجزئي بالمعادلة (40.7) نرى أن حد (عنصر) الأخطاء ليس له ارتباط مباشر مع قيمه الماضية، ومنه يمكن أن نفرض بأن الأخطاء الجديدة $(V_t + \gamma u_t)$ ليست مرتبطة ذاتيا، وإنما تأخذ شكل المتوسطات المتحركة من المرتبة الأولى أي Moving Averages of order one MA(1). ويمكن اختبار هذه الفرضية بواسطة إحصاءة داربين واتسون، أو بواسطة اختبارات أخرى معروفة تتعلق بمشاكل الارتباط الذاتي المشروحة بالفصل السادس. وإذا تبين أن هذه الأخطاء $(V_t + \gamma u_t)$ مرتبطة عبر الزمن، يجب البحث عن طرق خاصة للتقدير، لأن طريقة المربعات الصغرى العادية تصبح غير صالحة الإستعمال، وتكون هذه الطرق أقل تعقيدا من تلك المطلوبة عند تقدير نموذج تحويل Koyck. بالإضافة، إنه في "نموذج التعديل الجزئي" يكون لمعلمة Y_{t-1} ، (وهي $1 - \gamma$) معنى إقتصادي واضح، مادامت تحتوي على معامل التعديل γ . فيمكن الحصول على معلومات حول قيمة γ من المؤسسات، وبالتالي تطبيق طرق التقدير المختلط (عن طريق التعويض بقيمة γ^* المقدرة) ونواصل مع النموذج:

$$[Y_t - (1 - \gamma^*)Y_{t-1}] = \gamma\alpha + \gamma\beta X_t + (V_t + \gamma u_t)$$

حيث أن γ^* هي قيمة معامل التعديل المحصل من المؤسسات أو مصادر أخرى وأصبح "مبدأ تعديل المحزون" مشهورا من شرح تصرف الوحدات الإقتصادية. فنجد مثلا، الباحثين Houthakker-Taylor (1966)، وسعا هذا المبدأ إلى تصرف المستهلكين بالنسبة للطلب على السلع المعمرة.

بالرغم من أننا حصلنا على المعادلة (40.7) مباشرة، عوضا عن استعمال طريقة تحويلات Koyck، فإن مايكافئها في نموذج توزيع التأخير الهندسي يمكن رؤيته بواسطة التعويض المتتالي لتأخيرات الحد Y كمايلي:

$$\begin{aligned} Y_t &= \gamma\alpha + \gamma\beta X_t + (1-\gamma)[\alpha\gamma + \beta\gamma X_{t-1} + (1-\gamma)Y_{t-2}] + (V_t + \gamma u_t) \\ &= \gamma\alpha + \gamma\alpha(1-\gamma) + \gamma\beta X_t + \beta\gamma(1-\gamma)X_{t-1} + (1-\gamma)^2 Y_{t-2} + (V_t + \gamma u_t) \\ &= \gamma\alpha(2-\gamma) + \gamma\beta[X_t + (1-\gamma)X_{t-1}] + (1-\gamma)^2 Y_{t-2} + (V_t + \gamma u_t) \\ &= \gamma\alpha(2-\gamma) + \gamma\beta[X_t + (1-\gamma)X_{t-1}] + (1-\gamma)^2[\alpha\gamma + \beta\gamma X_{t-2} + (1-\gamma)Y_{t-3}] + (V_t + \gamma u_t) \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \alpha\gamma[2-\gamma + (1-\gamma)^2] + \gamma\beta[X_t + (1-\gamma)X_{t-1} + (1-\gamma)^2 X_{t-2}] + (1-\gamma)^3 Y_{t-3} + (V_t + \gamma u_t) \end{aligned}$$

$$Y_t = \alpha\gamma[\gamma^2 - 3\gamma + 3] + \beta\gamma[X_t + (1-\gamma)X_{t-1} + (1-\gamma)^2 X_{t-2}] + (1-\gamma)^3 Y_{t-3} + (V_t + \gamma u_t)$$

وبعد سلسلة التعويضات المتتالية نجد:

$$Y_t = \alpha\gamma \sum_{j=0}^{\infty} (1-\gamma)^j + \beta\gamma \sum_{j=0}^{\infty} (1-\gamma)^j X_{t-j} + (1-\gamma)^n Y_{t-n} + (V_t + \gamma u_t)$$

ومادام $0 \leq \gamma \leq 1$ ، فإن $0 \leq (1-\gamma) \leq 1$ كذلك وبالتالي نجد لما تكون n كبيرة: $(1-\gamma)^n Y_{t-n} \rightarrow 0$

ومنه نكتب العلاقة أعلاه على الشكل:

$$Y_t = \alpha + \beta\gamma \sum_{j=0}^{\infty} (1-\gamma)^j X_{t-j} + (V_t + \gamma u_t) \dots\dots (7.41)$$

وهي العلاقة المستلزمة بواسطة فرضية التعديل الجزئي، وهذه التعويضات المتتالية تعكس تحويلات Koyck. حيث يمكن حساب عدد الفترات المطلوبة لإتمام التعديل.

فمثلا إذا كانت P هي نسبة معينة للتعديل المفضل، تكون بعد فترة واحدة $(1 - \gamma)$ مطلوبة لكي يكون التغير المفضل تاما وبالتالي تبقى النسبة γ للتغير موجودة. وعلى العموم، بعد n فترة يكون لدينا $1 - \gamma^n$ لكي يكون التغير تاما. وإذا وضعنا هذه العبارة مساوية لقيمة P ، يمكن الحل من أجل n لنجد عدد الفترات المطلوبة في التعديل حتى تكون النسبة P كاملة أي:

$$p = 1 - \gamma^n$$

وبالتالي فإن:

$$n = \frac{\log(1 - p)}{\log \gamma}$$

إذا كانت هذه النسبة $P = 0.9$ (أي أن التغير يكون 90 % تاما من أجل قيم مختلفة لـ γ) نقول لما $\gamma = 0.1$ فإن عدد الفترات المطلوبة هي 1. أما إذا كانت $\gamma = 0.5$ فإن عدد الفترات المطلوبة هي:

$$n = \frac{\log(0.1)}{\log(0.5)} = 3.32$$

وعلى العموم كلما إقترب معدل التعديل γ من الواحد كلما زادت فترات التعديل اللازمة لكي يكون التعديل تاما.

3-3-7 نماذج التوقع Expectations models

إن مفتاح المجموعة الثانية للنماذج المكونة للمعادلة الديناميكية هي توقعات المتغيرات المستقبلية. فنفرض أن تصرف المتغير التابع يتأثر بواسطة القيم التوقعية لمتغير مستقل خارجي. ويمكن للتوقعات أن ترتبط بمتغيرات مثل المبيعات، الأسعار، المداخل أو معدلات الفائدة تبعا للمشكلة الخاصة لكل حالة. فمثلا، يمكن للمخزونات أن تعتمد على المبيعات المتوقعة في الفترة الموالية، نفقات الإستهلاك تبعا لتوقع الدخل، مخزونات المواد الأولية تبعا لتوقعات الأسعار المستقبلية وهكذا... وللحصول على نموذج بدلالة المتغيرات المشاهدة، من الضروري إضافة

فرضية أخرى حول تكوين التوقعات. وللتعمق أكثر في نمذجة التوقعات، ننتقل من علاقة التصرف البسيطة مثل:

$$Y_t = \alpha + \beta \hat{X}_{t+1} + u_t \dots (7.42)$$

حيث أن \hat{X}_{t+1} تمثل التنبؤ أو القيمة المتوقعة لـ X_{t+1} ، والمكونة في الزمن t . فمثلا، Y_t يمكن أن تمثل المخزونات الحالية و \hat{X}_{t+1} تمثل المبيعات المستقبلية. إن الفرضية البسيطة حول ذلك هي أن الشروط المتوفرة حاليا يجب (نتوقع) أن تهيمن على الفترة اللاحقة، جاعلة توقعات عدم التغير ($\hat{X}_{t+1} = X_t$) موجودة (متوفرة). وواضح أنه إذا أدخلنا فرضية عدم التغير في العلاقة التصرفية أعلاه، فإن النتيجة لا تختلف عن العلاقة الساكنة الحركة Static Relation بين القيم المشاهدة لـ Y و X . هناك فرضية أخرى أبسط وهي "نفس التغير" لقانون التباين، بحيث أن الفرق بين الفترة المستقبلية المتوقعة والقيمة الحالية يساوي إلى الفرق بين القيمة الحالية (المشاهدة) والقيمة السابقة على الشكل:

$$\hat{X}_{t+1} - X_t = X_t - X_{t-1}$$

وعلى العموم يمكن أن نفترض بأنه لما تحسب التنبؤات المعتمدة على البيانات الماضية Past Data، فإن المتعاملين الإقتصاديين يستعملون معرفتهم حول تصرف المتغير عبر الزمن. فإذا كانت القيم المتتالية لـ X مرتبطة مع بعضها البعض، فإن هذا الارتباط الذاتي يبين التوسع الذي يجعل القيم الحالية والماضية تساعد على التنبؤ بالقيم المستقبلية.

مثال 3.7:

لنفرض أن X_t تتصرف بنظام AR(1) على الشكل:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t: |\phi| < 1$$

إن القيمة التي نريد التنبؤ بها تكون معممة بنفس الطريقة أي:

$$X_{t+1} = \phi X_t + \varepsilon_{t+1}$$

ومادامت ليست لدينا معلومة مسبقة في الفترة الزمنية t من أجل التنبؤ ε_{t+1} ، بينما X_t تكون معروفة مع الفرضيات التالية:

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad \text{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0 \quad t \neq s$$

يكون التنبؤ الحساس (4) على الشكل:

$$\hat{X}_{t+1} = \phi X_t$$

ويمكن أن نبين بأن هذا التنبؤ "الأفضل" بواسطة وضع قانون التنبؤ العام بدلالة البيانات الحالية والماضية:

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j}$$

ثم نجد مجموعة المعالم a_j التي تصغر وسط مربعات خطأ التنبؤ Mean Squares of Forecast Errors (MSFE). إن خطأ التنبؤ هو $X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}$ ، ونأمل جعل $E(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1})^2$ أصغر ما يمكن. بالتعويض عن a_j من نموذج الإنحدار الذاتي AR(1)، وعن \hat{X}_{t+1} من قانون التنبؤ أعلاه نجد:

$$\begin{aligned} E(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1})^2 &= E\left(\phi X_t + \varepsilon_{t+1} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j}\right)^2 \\ &= E(\varepsilon_{t+1}^2) + E\left(\phi X_t - \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j}\right)^2 \end{aligned}$$

حيث أن الحدود المتقاطعة لها توقع مساوي للصفر لأن ε_{t+1} غير مرتبط مع البيانات السابقة. تظهر المعالم a_j فقط في الحد الثاني للطرف الأيمن، والتي هي القيمة المتوقعة لمربع، وبالتالي فهي غير سالبة. ومنه فاختبار $(a_1 = a_2 = \dots = 0, a_0 = \phi)$ يجعل قيمتها صفراً (معدومة)، وبالتالي فإن هذا الأخير (الإختبار) يصغر تباين خطأ التنبؤ، والتنبؤ "الحساس" المدخل مبدئياً، يكون أفضل تنبؤ في هذا الإتجاه، وتستلزم النتيجة أنه، بمعرفة القيمة الحالية X_t ،

4- أنظر:

G.S. Madalla "Introduction to Econometrics", Chap 10 PP 341-376, Mac Millan Publishing Company, New York. 1988 .

البيانات الماضية X_{t-1}, X_{t-2}, \dots ، لاحتياج لأية معلومة إضافية أخرى للمساعدة بالتنبؤ بالقيمة X_{t+1} . وإذا كانت $\phi = 1$ يصبح AR(1) على الشكل:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$$

وهو ما يسمى بنموذج التحرك العشوائي Random Walk Model. لنعتبر كتابة نموذج AR(1) أعلاه على الشكل:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} \quad |\phi| < 1$$

وهو نموذج من المرتبة الأولى لكل من الإنحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة ARMA(1,1) ولهذا فإن الصدمة العشوائية لها الأثر المكون لفترتين، مادامت تؤثر على قيم X المعاصرة (الحالية) والقيمة الموالية كذلك. للحصول على عبارة لعنصر (حد) الأخطاء ε_t ، نعيد كتابة وترتيب المعادلة أعلاه بالتعويض المتتالي في شكل تأخير لتعطي:

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t + \phi X_{t-1} - \theta [X_{t-1} - \phi X_{t-2} + \theta \varepsilon_{t-2}] \\ &= \varepsilon_t + (\phi - \theta) X_{t-1} + \theta \phi X_{t-2} - \theta^2 [X_{t-2} - \phi X_{t-3} + \theta \varepsilon_{t-3}] \\ &= \varepsilon_t + (\phi - \theta) [X_{t-1} + \theta X_{t-2}] + \theta^2 \phi X_{t-3} - \theta^3 [X_{t-3} - \phi X_{t-4} + \theta \varepsilon_{t-4}] \\ &= \varepsilon_t + (\phi - \theta) [X_{t-1} + \theta X_{t-2} + \theta^2 X_{t-3}] + \theta^3 \phi X_{t-4} - \theta^4 \varepsilon_{t-4} \end{aligned}$$

وبمواصلة التعويض نصل إلى:

$$X_t = \varepsilon_t + (\phi - \theta) [X_{t-1} + \theta X_{t-2} + \theta^2 X_{t-3} + \theta^3 X_{t-4} + \dots]$$

حيث أن الحد $\theta^n \varepsilon_{t-n}$ يضمحل لما تذهب n إلى ملانهاية، وهي عبارة مقنعة التمثيل لتحديد قانون التنبؤ الأمثل، وذلك مادام تقديمها بفترة واحدة يعطي تمثيلا لـ X_{t+1} على النحو:

$$X_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + (\phi - \theta) [X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \theta^3 X_{t-3} + \dots]$$

والتي تقترح التنبؤ الحساس على الشكل:

$$\hat{X}_{t+1} = (\phi - \theta) \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j X_{t-j}$$

ومنه يمكن إقتراح القانون العام للتنبؤ على الشكل:

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j}$$

ليكون وسط مربعات خطأ التنبؤ هو:

$$\begin{aligned} \text{M.S.F.E} &= E[X_{t+1} + \hat{X}_{t+1}]^2 \\ &= E\left[\varepsilon_{t+1} + (\phi - \theta) \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j X_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j}\right]^2 \\ &= E[\varepsilon_{t+1}]^2 + E\left[(\phi - \theta) \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j X_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j}\right]^2 \\ \text{M.S.F.E} &= E[\varepsilon_{t+1}]^2 + E\left[\sum_{j=0}^{\infty} [(\phi - \theta)\theta^j - a_j] X_{t-j}\right]^2 \end{aligned}$$

نلاحظ أننا نصل إلى أصغر وسط لمربعات خطأ التنبؤ، (MMSFE)، لما يكون الحد الثاني للمعادلة أعلاه (على اليمين) مساوياً للصفر. أي لما تكون المعالم في قانون التنبؤ معطاة بواسطة العبارة $a_j = (\phi - \theta)\theta^j$. وبالتالي يكون أفضل تنبؤ هو:

$$\hat{X}_{t+1} = (\phi - \theta) \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j X_{t-j}$$

معتبرين التنبؤ كأنه توزيع تأخير لامتناهي لقيم X المشاهدة. ونحصل على القانون الملائم للتنبؤ بواسطة كتابة:

$$\hat{X}_{t+1} = (\phi - \theta)X_t + (\phi - \theta)[\theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \theta^3 X_{t-3} + \dots]$$

وبملاحظة أن الحد الثاني (في الطرف الأيمن) هو $\theta \hat{X}_t$ ، حيث \hat{X}_t هو تنبؤ X_t المحسوبة في الفترة الزمنية $(t-1)$ من نفس قانون التنبؤ (وهذا يعني تطبيق تحويل Koyck)، وبالتالي فإن:

$$\hat{X}_{t+1} = (\phi - \theta)X_t + \theta \hat{X}_t \dots (7.43)$$

4-3-7 نموذج التوقعات المطابقة Adaptives expectations model

يعتمد هذا النموذج على الفكرة القائلة بأنه يمكن للمتغيرات التابعة والمؤخرة أن تظهر ضمن مجموعة المحدرات لمختلف نماذج التوقع. حيث أن قيمة Y في الفترة t لا تعتمد على قيمة X_t فقط، وإنما كذلك على المستوى المتوقع أو الدائم X^* في الزمن t أو نسميها X_t^* . إذ أصبح هذا النوع من النماذج كثير الإستعمال، لأنه يتعامل مع "التوقعات" حول العوامل المستقبلية والتي أصبحت أهميتها في التصرفات الاقتصادية معروفة. ولنفرض أن الكمية المطلوبة تكون محددة بواسطة السعر المتوقع P_t^* عوضاً عن السعر الحالي P_t على الشكل:

$$Q_t = \alpha + \beta P_t^* + u_t$$

وبناءً على فرضية "الدخل الدائم" للكاتب M. Friedman، فإن مستوى الإستهلاك C_t يكون محددًا بواسطة "الدخل المتوقع" أو بواسطة الدخل الدائم Y_t^* أي:

$$C_t = \delta Y_t^* + u_t$$

لتكون المتغيرات المتوقعة عبارة عن متغيرات مستقبلية غير مشاهدة، كما لاحظنا في الفقرة السابقة (نماذج التوقع). ولقياس نماذج التوقع يجب أن نجد طريقة ما لتعويض المتغيرات المتوقعة. وتتمثل هذه الطريقة، كما ذكرنا، في إفتراض قانون خاص لتشكيل التوقعات. ولنعيد كتابة نموذج التوقع المطابق في شكله العام والمماثل للمعادلة (42.7) على النحو:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t^* + u_t \dots (7.44)$$

ومادام X_t^* ليست مشاهدة مباشرة، فنفترض (بنفس الطريقة السابقة) أن التوقعات التي تعني أن قيمتها تكون مشكلة من القانون المطابق التالي:

$$X_t^* - X_{t-1}^* = \gamma (X_t - X_{t-1}^*) \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \dots (7.45)$$

حيث أن γ هي معامل التوقع، والتي تعني أن مرونة التوقعات تكون أقل من الواحد. ويستلزم ذلك أن التوقعات تكون مشكلة (مكونة) بواسطة تطوير (تحويل) التوقعات السابقة بناءً على ماتحصلنا عليه حالياً. ثم نعيد تشكيل هذه التوقعات في كل

فترة، فمثلا $X_t^* - X_{t-1}^*$ هي التغير في التوقعات الحالية. إن التغير هو فقط نسبة من الفرق مابين قيمة ما هو محقق حاليا (للمتغير X_t) والتوقعات السابقة X_{t-1}^* . ومنه فإن التوقعات الحالية X_t^* هي جزئيا محددة بواسطة التوقعات الماضية، X_{t+1}^* ، وجزئيا بواسطة المعلومة القائلة بأن المتعاملين الإقتصاديين يريدون القضاء على هذه التوقعات أي:

$$X_t^* = X_{t-1}^* + \gamma(X_t - X_{t-1}^*)$$

وإذا حلينا (44.7) من أجل X_t^* نجد:

$$X_t^* = -\alpha/\beta + \frac{1}{\beta}Y_t - \frac{1}{\beta}u_t \dots (7.46)$$

ثم لدينا:

$$X_{t-1}^* = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta}Y_{t-1} - \frac{1}{\beta}u_{t-1}$$

ثم بتعويض X_{t-1}^* و X_t^* بمعادلة التوقعات المطابقة (45.7) نجد:

$$\left[-\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta}Y_t - \frac{1}{\beta}u_t \right] - \left[-\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta}Y_{t-1} - \frac{1}{\beta}u_{t-1} \right] = \gamma \left[X_t - \left(-\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta}Y_{t-1} - \frac{1}{\beta}u_{t-1} \right) \right]$$

نجد العبارة:

$$Y_t = (\gamma\alpha) + (\gamma\beta)X_t + (1-\gamma)Y_{t-1} + [u_t - (1-\gamma)u_{t-1}]$$

$$Y_t = \alpha' + \beta'X_t + \lambda Y_{t-1} + V_t \dots (7.47)$$

حيث أن:

$$\alpha' = \gamma\alpha$$

$$\beta' = \gamma\beta$$

$$\lambda = 1 - \gamma$$

$$V_t = u_t - \lambda u_{t-1}$$

ومنه نصل إلى عبارة تحتوي على نفس المتغيرات الموجودة في نموذج تحويل Koyck ونموذج التعديل الجزئي.

مثال (4.7):

إذا عدنا للمثال (3.7)، وأخذنا المعادلة (43.7)، ثم نضع $\phi = 1$. فإن ذلك يعطي الشكل المعروف في الإقتصاد على أنه التوقعات المطابقة، أي:

$$\hat{X}_{t+1} = (1 - \theta)X_t + \theta\hat{X}_t$$

أو:

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + (1 - \theta)(X_t - \hat{X}_t)$$

إن فرضية التوقعات المطابقة بينت نجاحها في عدة تطبيقات ميدانية ابتداء من منتصف الخمسينات. حيث استعملت مرة من طرف Phillip Cagan 1956 في دراسته للتضخم الجامح Hyper-inflation، ومن طرف Mark Nerlove في دراسته للعرض الزراعي الديناميكي. وبالعودة للمعادلة (42.7)، مع إدخال التوقعات المطابقة في أحد شكلها المتكافئين نجد:

$$\hat{X}_{t+1} = (1 - \theta) \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j X_{t-j} \dots (7.48a)$$

$$\hat{X}_{t+1} = \theta\hat{X}_t + (1 - \theta)X_t \dots (7.48b)$$

ليكون لدينا تأكيدا آخر لنموذج توزيع التأخير الهندسي للمعادلة (42.7):

$$Y_t = \alpha + \beta(1 - \theta) \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j X_{t-j} + u_t$$

ويمكن لتوزيع التأخير اللامتناهي أن يحذف بواسطة تحويل Koyck ليعطي عبارة متناهية ومشابهة للمعادلة (47.7) على الشكل:

$$Y_t = \alpha(1 - \theta) + \beta(1 - \theta)X_t + \theta Y_{t-1} + [u_t - \theta u_{t-1}] \dots (7.49)$$

5-3-7 نظام تأخير Pascal:

لقد اقترح Solow 1960 نظاما للتأخير يعتمد على الفكرة القائلة بأن قيم الترجيحات ليست مخصصة إعتباطيا، وإنما معرفة على اساس توزيع تأخير Pascal. حيث نعيد كتابة دالة التأخير (3.7) على الشكل:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 [w_0 X_t + w_1 X_{t-1} + w_2 X_{t-2} + \dots + w_s X_{t-s}] + u_t \dots (7.50)$$

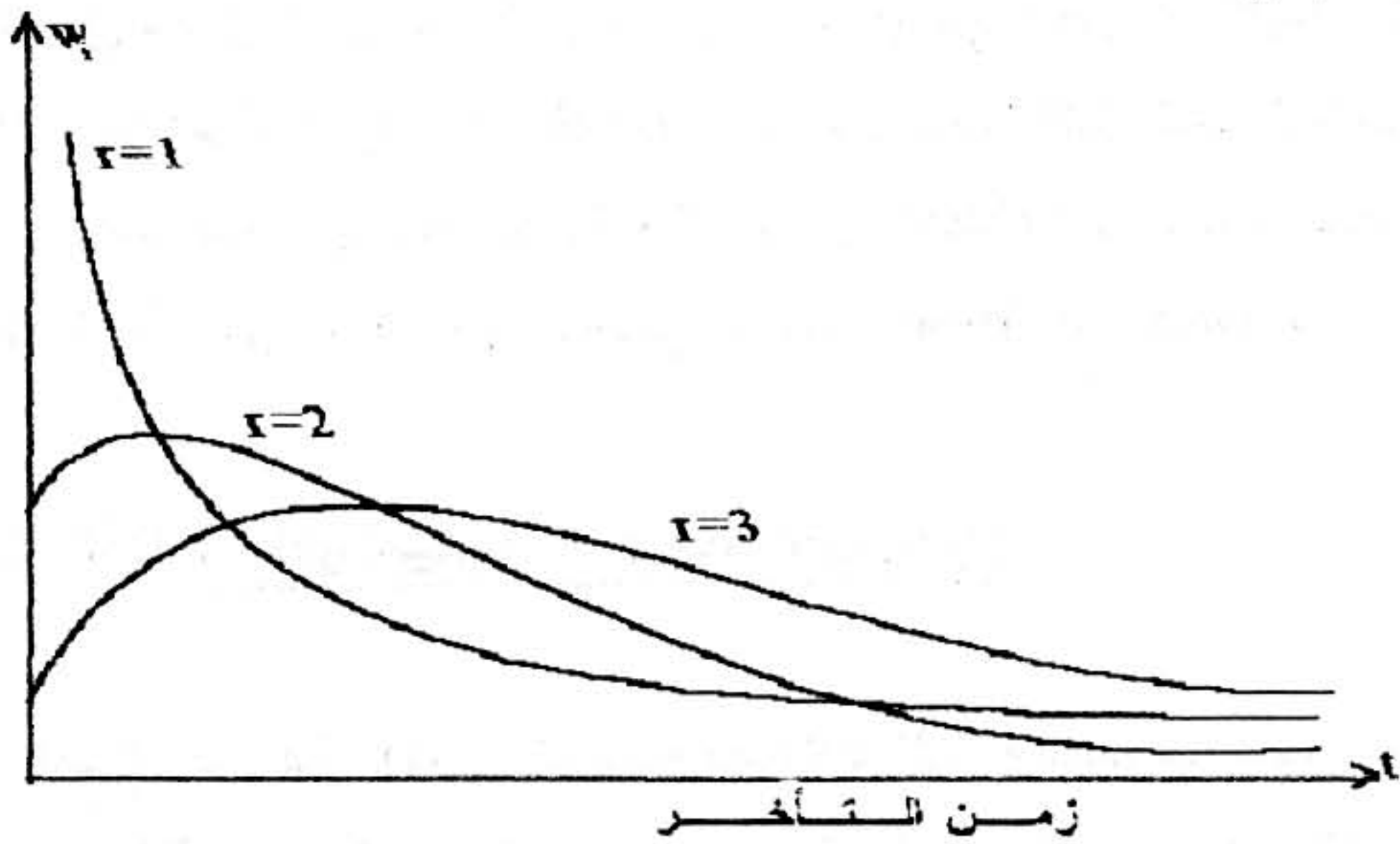
حيث أن $u_t \sim NID(0, \sigma_u^2)$. ثم إن الترجيحات w_i ($i=0,1,\dots,s$) معرفة على أساس نموذج تأخير Pascal (5)

$$W_i = \binom{i+r-1}{i} (1-\lambda)^r \lambda^i = \frac{(i+r-1)!}{i!(r-1)!} (1-\lambda)^r \cdot \lambda^i$$

حيث أن i هي فترة التأخير، r هي عدد صحيح إعتباطي مختار، و λ هي معلمة سوف نقدرها من نموذج الإنحدار. إن معادلة الإنحدار (50.7) تصبح على الشكل:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 (1-\lambda)^r \left[X_t + r\lambda X_{t-1} + \frac{r(r+1)}{2!} \lambda^2 X_{t-2} + \dots \right] + u_t \dots (7.51)$$

نلاحظ أنه لما $r=1$ ، فإن $w_i = (1-\lambda)\lambda$ أي أن توزيع Pascal يختصر إلى توزيع التأخير الهندسي، كما هو موضح بالشكل أدناه. حيث نرى توزيع الترجيحات من أجل $\lambda = 0.6$ وقيم مختلفة لـ r :



إن تقدير تأخير Pascal معقد أكثر من طريقة الترجيحات الإعتباطية أو نماذج التأخير الهندسي. فمثلا نفرض أن $r=2$ ، ليكون نموذج تأخير Pascal على الشكل:

5- أنظر:

J. Kmenta "Elements of Econometrics", Mac Millan, New York 1971, PP489-491.

$$Y_t = \alpha + \beta_0(1-\lambda)^2 [X_t + 2\lambda X_{t-1} + 3\lambda^2 X_{t-2} + 4\lambda^3 X_{t-3} + \dots] + u_t \dots (7.52)$$

وبتأخير (52.7) بفترة واحدة، وضربها بواسطة -2λ نجد:

$$-2\lambda Y_{t-1} = -2\lambda\alpha + \beta_0(1-\lambda)^2 [-2\lambda X_{t-1} - 4\lambda^2 X_{t-2} - 6\lambda^3 X_{t-3} - \dots] - 2\lambda u_{t-1} \dots (7.53)$$

وبتأخير المعادلة (52.7) بفترتين ثم ضربها بـ λ^2 نجد:

$$\lambda^2 Y_{t-2} = \lambda^2\alpha + \beta_0(1-\lambda)^2 [\lambda^2 X_{t-2} + 2\lambda^3 X_{t-3} + 3\lambda^4 X_{t-4} + \dots] + \lambda^2 u_{t-2} \dots (7.54)$$

ثم نجمع الآن المعادلات الثلاث (52.7)، (53.7) و (54.7) لنجد:

$$Y_t = \alpha(1-\lambda)^2 + \beta_0(1-\lambda)^2 X_t + 2\lambda Y_{t-1} + [u_t - 2\lambda u_{t-1} + \lambda^2 u_{t-2}] \dots (7.55)$$

وتحتوي هذه المعادلة على قيم تأخيرية لـ Y ، كما أن حد الأخطاء مرتبط ذاتيا. وسوف نتطرق لطرق تقدير هذا النوع من النماذج في الفقرات الآتية. ونشير إلى أن مشكل تقدير معالم نموذج تأخير Pascal يصبح معقدا أكثر كلما إرتفعت قيمة العدد الصحيح r ، كما أنه من المعادلة (55.7)، يمكن إعطاء قيم سالبة للعدد الصحيح r لتتوسع إلى نموذج توزيع التأخير العقلاني لصاحبه Jorgenson 1966.

6-3-7 الأنظمة الديناميكية Dynamic Systems

نتطرق في هذه الفقرة لأنظمة معادلات تشرح تصرف عدد من المتغيرات الداخلية. إن الأنظمة الديناميكية توضح تصرف المتغيرات الداخلية عبر الزمن. حيث تهتم بدراسة طبيعة مسلك الزمن Time path لمعرفة هل هذا المسلك يتقارب إلى نقطة التوازن.

لنأخذ نظام تحديد الدخل الوطني، بإدخال فترة تأخير واحدة في دالة الاستهلاك:

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha + \beta Y_{t-1} \\ Y_t &= I_t + C_t \end{aligned} \dots (7.56)$$

حيث أن المتغيرات الداخلية هي Y_t ، C_t والمتغير الخارجي هو I_t . ولنفرض أن الإستثمار مساوي للقيمة الثابتة I في كل فترة زمنية. ثم نتساءل عن طبيعة نقطة التوازن. حيث نعرف قيم التوازن للمتغيرات الداخلية على أنها تلك القيم التي لما نصل إليها تبقى هذه المتغيرات محتفظة بتصرفها باستمرار. ولهذا، فإن قيم التوازن للإستهلاك والدخل والممثلة بالقيتين C^e ، Y^e على الترتيب، يمكن الحصول عليها بواسطة حل المعادلتين:

$$C^e = \alpha + \beta Y^e$$

$$Y^e = C^e + I$$

لقد حذفنا عامل الزمن من النموذج (56.7) لأنه في نقطة التوازن تكون قيمة الدخل المؤخرة بفترة واحدة مساوية للقيمة الحالية أي $Y_t = Y_{t-1} = Y^e$. ويكون حل هذه المعادلات الساكنة الحركة على النحو:

$$C^e = \frac{1}{1-\beta} (\alpha + \beta I)$$

$$Y^e = \frac{1}{1-\beta} (\alpha + I)$$

ومنه نقول أنه من أجل كل نظام ديناميكي له نقطة توازن، يوجد نظام ساكن الحركة مناسب له ويعرف تلك الوضعية المناسبة، وبالتالي نستنتج أن نظاما ساكن الحركة واحدا يصلح لعدد من الأنظمة الديناميكية.

إذا اعتبرنا مسلك الزمن للمتغيرات، ورمزنا لنقطة المسلك بـ C_0 و Y_0 لكل من C_t و Y_t على الترتيب، كشروط بدائية. فيعطي النظام الديناميكي مسلك الزمن لـ C_t و Y_t بدلالة نقطة التوازن، نقول عن نظام بأنه مستقر *stable*. ومنه نعيد كتابة المعادلة (56.7) على الشكل:

$$C_t = \alpha + \beta Y_{t-1} \quad \dots (7.57)$$

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + I_t$$

وبالنظر للمعادلة (57.7)، نلاحظ أن الشكل المختصر لمعادلة الدخل هو أيضا شكل نهائي لأنه يبين تطور الدخل بدون الإشارة إلى تصرف متغير آخر (الإستهلاك). أما

عند البحث عن الشكل المختصر والنهائي لمعادلة الإستهلاك فنحتاج إلى التخلص من Y_{t-1} من أجل الحصول على الصيغة النهائية وذلك بتأخير معادلة التعريف بفترة واحدة أي:

$$Y_{t-1} = C_{t-1} + I_{t-1}$$

ليصبح الشكل النهائي للمعادلتين كمايلي:

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha + \beta C_{t-1} + \beta I_{t-1} \\ Y_t &= \alpha + \beta Y_{t-1} + I_t \end{aligned} \dots\dots (7.58)$$

ومنه يمكن إستعمال كل معادلة أعلاه على إنفراد لتحديد مسلك الزمن للمتغيرات الداخلية الموافقة لذلك. لنفرض أن $I_t = I$ ، تكون نقطة التوازن هي:

$$C^e = \frac{1}{1-\beta} (\alpha + \beta I)$$

لنجد أن:

$$\alpha = -\beta I + (1-\beta)C^e$$

وبتعويض α في معادلة الإستهلاك (58.7) نجد:

$$\begin{aligned} C_t &= -\beta I + (1-\beta)C^e + \beta C_{t-1} + \beta I_{t-1} \\ C_t - C^e &= \beta [C_{t-1} - C^e] \dots\dots (7.59) \end{aligned}$$

حيث $I_{t-1} = I_t = I$. وبإعطاء قيمة الإنطلاق C_0 نجد:

$$C_1 - C^e = \beta [C_0 - C^e]$$

ثم لدينا:

$$\begin{aligned} C_2 - C^e &= \beta [C_1 - C^e] = \beta^2 [C_0 - C^e] \\ C_3 - C^e &= \beta^3 [C_0 - C^e] \end{aligned}$$

وبمواصلة التعويض نحصل على:

$$\begin{aligned} C_t - C^e &= \beta^t [C_0 - C^e] \\ C_t &= C^e + \beta^t [C_0 - C^e] \dots\dots (7.60) \end{aligned}$$

ومنه فإن C_t تقترب إلى C^e إذا وفقط إذا كان الحد الثاني ليمين المعادلة (60.7) يساوي الصفر كلما إرتفعت قيمة t . يحدث هذا إذا كانت $\beta^t \rightarrow 0$ لما $t \rightarrow \infty$. ومنه فإن الشرط الضروري لذلك هو $|\beta| < 1$ وهو شرط الإستقرار. نستنتج بأن تقارب النظام الديناميكي إلى نقطة التوازن يعتمد على تصرف معلمة المتغير التابع المؤخر في معادلة الشكل النهائي أما إذا كانت $|\beta| > 1$ فإن النظام يتباعد Diverge. وإذا كانت $\beta < 0$ فإن المسلك يكون متذبذبا. ومادام β يمثل الميل الحدي للإستهلاك، فيمكن تخفيض شرط الإستقرار إلى $0 < \beta < 1$ ، وسوف نحصل على نفس شروط الإستقرار لمعادلة الدخل النهائي (58.7).

مثال (5.7):

لنعتبر نظام المعادلات التالي:

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha + \beta Y_{t-1} \\ Y_t &= C_t + I_t \quad \dots (7.61) \\ I_t &= \gamma Y_t + A \end{aligned}$$

حيث أن C ، Y ، I متغيرات داخلية، A متغير خارجي. عندما نفترض أن المتغير الخارجي A له قيمة ثابتة يكون من السهل إيجاد نقطة توازن واحدة معطاة كدالة لـ A عوضا عن وضعية توازن متحركة. والتي هي دالة لـ A . وبالتعويض في معادلة تعريف الدخل نجد:

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \gamma Y_t + A$$

لتكون معادلة الشكل المختصر للدخل هي:

$$Y_t = \frac{\alpha + A}{1 - \gamma} + \frac{\beta}{1 - \gamma} Y_{t-1}$$

وبناءا على نتيجة المعادلة (60.7) يكون شرط الإستقرار للمعادلة الأخيرة أعلاه هو:

$$-1 < \frac{\beta}{1 - \gamma} < 1$$

ومنه فإن C_t تقترب إلى C^e إذا وفقط إذا كان الحد الثاني ليمين المعادلة (60.7) يساوي الصفر كلما إرتفعت قيمة t . يحدث هذا إذا كانت $\beta^t \rightarrow 0$ لما $t \rightarrow \infty$. ومنه فإن الشرط الضروري لذلك هو $|\beta| < 1$ وهو شرط الإستقرار. نستنتج بأن تقارب النظام الديناميكي إلى نقطة التوازن يعتمد على تصرف معلمة المتغير التابع المؤخر في معادلة الشكل النهائي أما إذا كانت $|\beta| > 1$ فإن النظام يتباعد Diverge. وإذا كانت $\beta < 0$ فإن المسلك يكون متذبذبا. ومادام β يمثل الميل الحدي للإستهلاك، فيمكن تخفيض شرط الإستقرار إلى $0 < \beta < 1$ ، وسوف نحصل على نفس شروط الإستقرار لمعادلة الدخل النهائي (58.7).

مثال (5.7):

لنعتبر نظام المعادلات التالي:

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha + \beta Y_{t-1} \\ Y_t &= C_t + I_t \quad \dots (7.61) \\ I_t &= \gamma Y_t + A \end{aligned}$$

حيث أن C ، Y ، I متغيرات داخلية، A متغير خارجي. عندما نفترض أن المتغير الخارجي A له قيمة ثابتة يكون من السهل إيجاد نقطة توازن واحدة معطاة كدالة لـ A عوضا عن وضعية توازن متحركة. والتي هي دالة لـ A . وبالتعويض في معادلة تعريف الدخل نجد:

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \gamma Y_t + A$$

لتكون معادلة الشكل المختصر للدخل هي:

$$Y_t = \frac{\alpha + A}{1 - \gamma} + \frac{\beta}{1 - \gamma} Y_{t-1}$$

وبناءا على نتيجة المعادلة (60.7) يكون شرط الإستقرار للمعادلة الأخيرة أعلاه هو:

$$-1 < \frac{\beta}{1 - \gamma} < 1$$

وإذا تحقق هذا الشرط، فإن النظام يكون مستقرا ويتقارب إلى نقطة توازن تعتبر حلا للنموذج الساكن. إن قيمة $\beta/(1-\gamma)$ تحدد خصائص الإستقرار لكل المتغيرات الداخلية الثلاثة. فإذا كتبنا:

$$C_{t-1} = \alpha + \beta Y_{t-2}$$

ثم لدينا:

$$\begin{aligned} C_t - \frac{\beta}{1-\gamma} C_{t-1} &= (\alpha + \beta Y_{t-1}) - \frac{\beta}{1-\gamma} (\alpha + \beta Y_{t-2}) \\ &= \alpha \left(1 - \frac{\beta}{1-\gamma} \right) + \beta \left[Y_{t-1} - \frac{\beta}{1-\gamma} Y_{t-2} \right] \\ &= \alpha \left(1 - \frac{\beta}{1-\gamma} \right) + \beta \left[\frac{\alpha + A}{1-\gamma} \right] \end{aligned}$$

ومنه تكون المعادلة النهائية للإستهلاك:

$$C_t = \left(\alpha + \frac{\beta A}{1-\gamma} \right) + \frac{\beta}{1-\gamma} C_{t-1}$$

ومنه يمكن تحليل شروط الإستقرار لمعرفة أي توفيق لقيم المعالم الهيكلية (β) و (γ) سوف يعطي لنا أماكن (نقاط) الإستقرار. نرسم محورا لنزوج القيم (γ, β) . ثم نقسم هذا المحور إلى مناطق بحيث أن المتراجحة $1 < \beta/(1-\gamma) < 1$ - تتحقق. ومناطق أخرى لا تتحقق فيها هذه الأخيرة. ثم ننظر إلى مقام المتراجحة لنجد هناك حالتين

$$a) 1 - \gamma > 0 \Rightarrow \gamma < 1$$

ومنه يكون شرط الإستقرار هو

$$\gamma - 1 < \beta < 1 - \gamma$$

$$b) 1 - \gamma < 0 \Rightarrow \gamma > 1$$

ليكون شرط الإستقرار هو:

$$1 - \gamma < \beta < \gamma - 1$$

$$Y_t = \frac{1}{1-\beta} (\gamma Y_{t-1} + \alpha + A)$$

ومباشرة تكون شروط الإستقرار لهذه المعادلة هي:

$$-1 < \frac{\gamma}{1-\beta} < 1$$

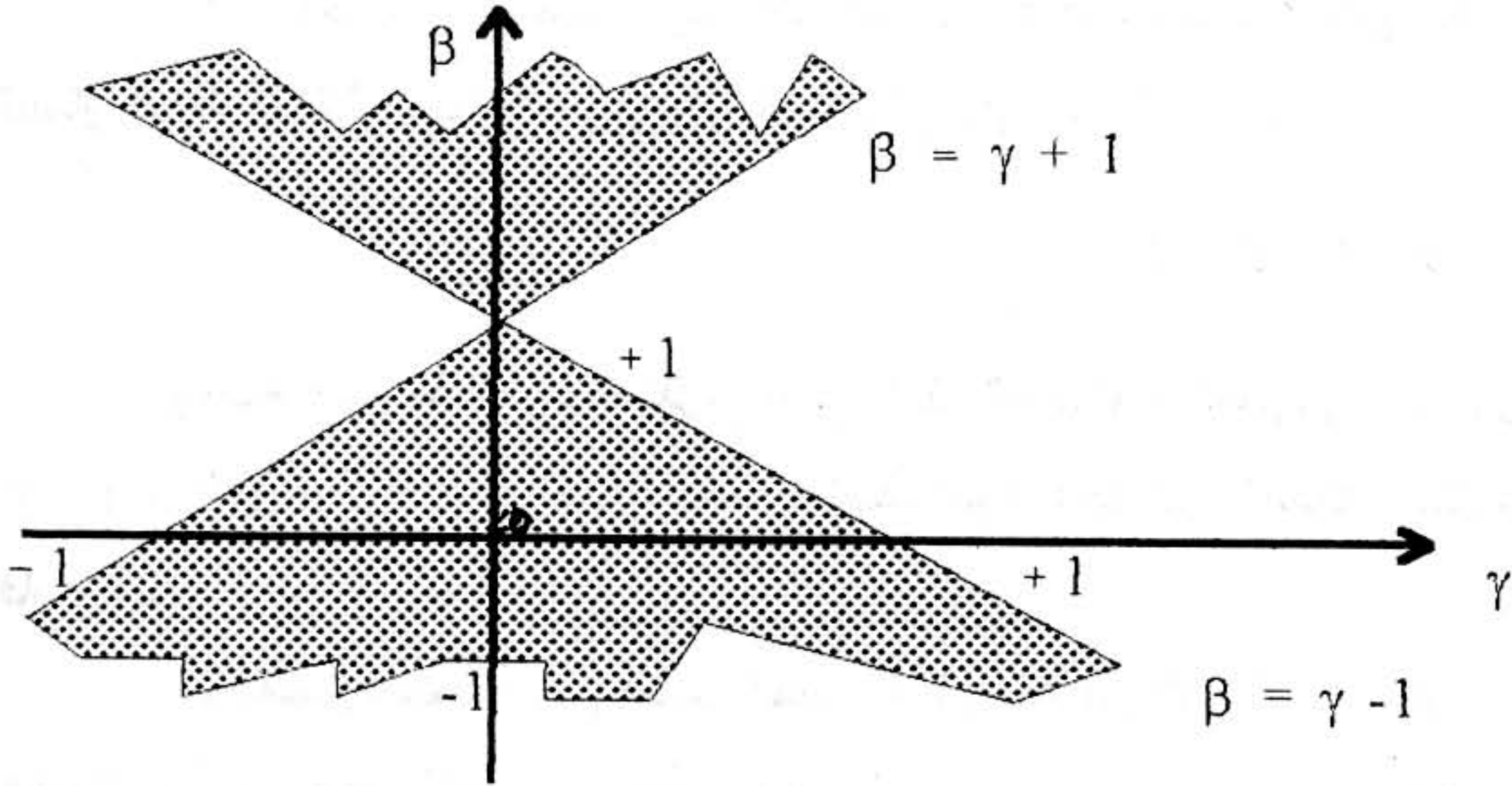
$$a) 1-\beta > 0 \Rightarrow \beta < 1$$

لتكون شروط الإستقرار هي $\beta - 1 < \gamma < 1 - \beta$

$$b) 1-\beta < 0 \Rightarrow \beta > 1$$

لتكون شروط الإستقرار هي $1 - \beta < \gamma < \beta - 1$

وبإتباع نفس الطريقة في الشكل أدناه نجد أن:



لنلاحظ أن المساحة المشطبة تمثل زوج القيم (β, γ) المحتوية على الحلول المستقرة. ومادام β, γ هما الميلين الحديين لكل من الإستهلاك والإستثمار على الترتيب، فإننا نتقيد بالربع الموجب فقط. وإذا كنا نعرف من النظرية الإقتصادية بأن $0 < \beta < 1$ فإن النظام يكون مستقرا فقط إذا وقعت النقطة (β, γ) داخل المثلث الذي تكون أطرافه هي النقاط التالية $(0,0)$ ، $(0,1)$ ، $(1,0)$ وهو مثلث بزاوية قائمة أي أن $0 < \beta + \gamma < 1$.

7-4 طرق تقدير المعالم لنماذج محتوية على متغيرات داخلية مؤخرة Y_{t-1}

إن أغلب مشاكل تقدير النماذج الديناميكية تظهر في حالة وجود متغيرات داخلية مؤخرة كمتغيرات مفسرة. أما إذا احتوى نموذج التأخير على متغيرات خارجية مؤخرة فقط فلا يوجد مشكل يذكر في عملية التقدير. إذ نطبق مباشرة إما طريقة المربعات الصغرى العادية على النموذج الأصلي، أو نضع (ندخل) ترجيحات إعتباطية لمتغيرات التأخير لتخفيض عدد المعالم المطلوب تقديرها مباشرة من النموذج، أو نطبق طريقة تأخير كثير الحدود لـ Almon غير المباشرة. إذن إذا احتوى النموذج على قيم تأخيرية للمتغيرات التابعة، فأول مشكل يواجهنا هو أن Y_{t-1} غير مستقلة عن عنصر الأخطاء V_t . ومنه تكون مقدرات المربعات الصغرى العادية متحيزة. وسوف نقترح النموذج التالي للتقدير.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + V_t \dots (7.63)$$

وبصياغتها في شكل المعادلة (26.7) تكون:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + a_1 Y_{t-1} + V_t$$

$$Y_t - a_1 Y_{t-1} = \alpha + \beta_0 X_t + V_t$$

$$A(L)Y_t = \alpha + B(L)X_t + V_t \dots (7.64)$$

بحيث أن:

$$A(L) = 1 - a_1 L$$

$$B(L) = \beta_0$$

ولتوضيح المشاكل المتعلقة بتقدير النماذج الديناميكية، نبدأ بحالة بسيطة.

مثال (6.7):

لنعتبر نموذج الإنحدار الذاتي التالي:

$$Y_t = \beta Y_{t-1} + u_t \dots (7.65)$$

حيث أن: $u_t \sim \text{IID}(0, \sigma_u^2)$

فالنموذج (65.7) أعلاه، يتناسب مع نظام AR(1) المطبق على المتغير Y_t . إذا كانت المعلمة $|\beta| < 1$ ، مع القيم السابقة لعينة الأخطاء u_{t-1} تتبع نظام $IID(0, \sigma_u^2)$ ، فإنه يمكن تمثيل Y_t كسلسلة نهائية لقيم الأخطاء الماضية مثل:

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u_{t-i}$$

ومنه ينتج أن $E(Y_t) = 0$ ، وكذلك $\text{var}(Y_t) = \sigma_u^2 / (1 - \beta^2)$ ، وينتج أن Y_t مستقلة عن القيم المستقبلية للأخطاء u_{t+1} ، $i > 0$ ، وأن Y_t لها تباين مشترك متناقص مع الأخطاء الماضية u_{t-1} كلما إرتفعت i . إذا طبقنا مقدار المربعات الصغرى العادية على المعادلة (65.7) نجد:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum Y_{t-1} Y_t}{\sum Y_{t-1}^2}; \quad t = 2, 3, \dots, n$$

أما إذا كانت Y_0 موجودة فإن $t=1, 2, \dots, n$ وبالتعويض في (65.7) نجد:

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum Y_{t-1} u_t}{\sum Y_{t-1}^2}$$

وبالتالي فإن مقدار المربعات الصغرى $\hat{\beta}$ يكون متحيزا. ولكن بوجود الفرضية $|\beta| < 1$ يكون هذا المقدار متسقا وتقاربيا له توزيع طبيعي. لإشتقاق الخصائص التقاربية في نموذج الإتحاد الذاتي (65.7)، نقول بوجود الفرضيات أعلاه، فإن:

$$E\left(\frac{\sum Y_{t-1} u_t}{n}\right) = 0$$

$$E\left[\frac{\sum Y_{t-1}^2}{n}\right] = \sigma_u^2 / (1 - \beta^2)$$

وإذا كان العزم من الدرجة الرابعة موجودا، فإن $\text{var}\left(\frac{\sum Y_{t-1} u_t}{n}\right)$

و $\text{var}\left[\frac{\sum Y_{t-1}^2}{n}\right]$ يمكن أن يكون لهما نهايتين مساويتين للصفر لما $n \rightarrow \infty$.

وهذا يستلزم ما يلي:

$$i) p \lim \left(\frac{\sum Y_{t-1} u_t}{n} \right) = 0$$

$$ii) p \lim \left[\frac{\sum Y_{t-1}^2}{n} \right] = \sigma_u^2 / (1 - \beta^2)$$

$$iii) \frac{\sum Y_{t-1} u_t}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \eta \sim N \left(0, \frac{\sigma_u^2}{1 - \beta^2} \right)$$

$$iv) p \lim(\hat{\beta}) = \beta + \left[p \lim \left(\frac{\sum Y_{t-1} u_t}{n} \right) / p \lim \left[\frac{\sum Y_{t-1}^2}{n} \right] \right] = \beta$$

لنجد:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} \left(\frac{1 - \beta^2}{\sigma_u^2} \right) \eta \sim N[0, (1 - \beta^2)]$$

ومادام ضرب المقدر بالمقدار n يتقارب إحصائيا إلى $(1 - \beta^2)$ ، فإن طريقة المربعات الصغرى العادية تكون صالحة تقاربيا، وننظر إلى $\hat{\beta}$ على أنه مقدر متسق ونقاربيا له توزيع طبيعي. ونفس النتائج تصلح لبقية النماذج الديناميكية مع بعض الفرضيات الإضافية والضرورية. وبالعودة للمعادلة (63.7) نلاحظ أن مشاكل التقدير في هذه الحالة يمكن تلخيصها في ثلاث حالات مختلفة ومهمة.

1-4-7 المتغير التابع المؤخر مع الأخطاء غير مرتبطة ذاتيا:

تكون، في هذه الحالة، أخطاء المعادلة (63.7)، V_t ، مستقلة عن المتغير التابع المؤخر Y_{t-1} ، بحيث أن:

$$V_t \sim N(0, \sigma_v^2)$$

$$E(V_t V_s) = 0, \quad t \neq s$$

$$E(X_t V_t) = E(Y_{t-1} V_t) = 0$$

لكن Y_{t-1} تعتمد على القيم الماضية لعنصر الأخطاء V_{t-1} أي أن:

$$E(V_{t-1} Y_{t-1}) \neq 0: i > 0$$

ومنه فإن تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على (63.7) في هذه الحالة يعطي مقدرات متحيزة بالنسبة للعينات الصغيرة. وبالتالي يجب البحث عن متغير أداتي (IV) مناسب، من أجل تعويض Y_{t-1} والتي تسبب مشاكل التقدير في نموذج التأخير (63.7) كما يلي:

(a) نحدر Y_t في القيم التأخيرية لـ X_t لنجد:

$$\hat{Y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_{t-1} + \hat{a}_2 X_{t-2} + \dots$$

إن عدد التأخيرات المقدرة يتم بناءا على جودة التوفيق كلما أضفنا قيما تأخيرية لـ X في العلاقة أعلاه. وإذا كانت X مرتبطة ذاتيا بدرجة عالية فإن أحسن توفيق نصل إليه، يكون بعد تأخيرين أو ثلاثة لـ X .

(b) نؤخر \hat{Y}_t بفترة واحدة، لنحصل على \hat{Y}_{t-1} والتي نستعملها كمتغير أداتي لتعويض Y_{t-1} في النموذج الأصلي (63.7). ثم نطبق المربعات الصغرى العادية على النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 \hat{Y}_{t-1} + V_t$$

ولكن تبقى مقدرات المتغيرات الأداة للنموذج أعلاه متحيزة بالنسبة للعينات الصغيرة، لكنها تصبح تقاربيا متسقة وكفوءة في العينات الكبيرة. وإذا كتبنا المعادلة (63.7) في شكل مصفوفات على النحو:

$$Y = W\beta + V \dots (7.66)$$

$$W_t = [1 \quad X_t \quad Y_{t-1}] \quad \text{حيث أن:}$$

مع العلم أن i هو $n \times 1$ موجه عمود، و Y_0 يجب أن تكون معروفة. ومنه تكون المصفوفة W_t عشوائية مادامت تحتوي على Y_{t-1} . ويمكن إضافة الفرضية التالية:

$$\text{plim}(n^{-1}W'W) = Q_{ww}$$

حيث أن Q_{WW} مصفوفة متناظرة ومحددة موجبة. وبتطبيق نظرية Mann-Wald نحصل على النتيجة (6):

$$i) \text{plim}(n^{-1}W'V) = 0$$

$$ii) (n^{-1/2}W'V) \xrightarrow{D} \eta \sim N(0, \sigma_V^2 Q_{WW})$$

وبتطبيق المربعات الصغرى العادية على المعادلة (6.7) نجد:

$$\hat{\beta} = (W'W)^{-1}W'Y = \beta + (W'W)^{-1}W'V$$

لنحصل على :

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) = (n^{-1}W'W)^{-1}(n^{-1/2}W'V)$$

وبتطبيق النتيجة (i) و (ii) أعلاه نجد:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} \eta Q_{WW}^{-1} \sim N[0, \sigma_V^2 Q_{WW}^{-1}]$$

وبالنسبة للعينات الكبيرة يكون:

$$\hat{\beta} \overset{A}{\sim} N[0, \sigma_V^2 n^{-1} Q_{WW}^{-1}] \dots (7.67)$$

ويمكن القول أنه حتى في ظل غياب فرضية التوزيع الطبيعي فإن مقدرات المربعات الصغرى تكون متسقة وتقاربيا موزعة طبيعيا. أما لما الأخطاء V_i تتبع التوزيع الطبيعي، فإن هذه المقدرات تكون كفوة ومتماثلة مع مقدرات المعقولة العظمى. ويمكن توسيع هذه النتائج إلى الحالة التي تكون فيها عدة تأخيرات لقيم Y و X . ثم نقول في حالة المتغيرات التابعة المؤخرة تبقى طريقة المربعات الصغرى صالحة شريطة أن تكون الأخطاء مستقلة عبر الزمن (غير مرتبطة ذاتيا).

6- أنظر:

H.B. Mann and A. Wald "On the statistical treatment of linear stochastic difference equations" *ECONOMETRICA* Vol 11, 1943, PP173-220.

7-4-2 المتغير التابع المؤخر مع الأخطاء مرتبطة

في شكل المتوسط المتحرك

تكون، في هذه الحالة، الأخطاء V_t مرتبطة في شكل المتوسط المتحرك Moving Average MA(.). وإذا نظرنا للمعادلة (63.7) وقارناها بالمعادلتين (47.7). (49.7) يكون شكل هذا الارتباط من المرتبة الأولى للمتوسط المتحرك MA(1) أي:

$$V_t = u_t - \phi u_{t-1} \quad 0 \leq \phi \leq 1$$

$$u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$$

$$V_t \sim N(0, \sigma_v^2)$$

$$E(u_t u_s) = 0 \quad t \neq s$$

ومنه يكون هنا $\phi = \beta_3$ الخاص بالمعادلة (63.7). حيث يظهر هذا النوع من الارتباط لما يكون النموذج (63.7) مشتقا من نموذج التأخير الهندسي لـ Koyck بالمعادلة (36.7)، لنموذج التوقعات المطابقة بالمعادلة (47.7). ونموذج Solow بالمعادلة (55.7). حيث أن u_t هو عنصر الأخطاء للنموذج الأصلي. قبل إدخال إجراءات التحويل المناسبة، والتي تعطي النموذج المذكورة بالعلاقة MA(1) أعلاه، حيث أن:

$$Y_t = f(X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-s}, u_t)$$

إذا كانت ϕ معروفة، يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى المعممة على البيانات المحولة:

$$(Y_t - \phi Y_{t-1}) = \beta_1 + \beta_2 X_t + V_t$$

$$V_t = u_t - \phi u_{t-1} \quad \text{مع}$$

أما إذا كانت ϕ غير معروفة، فيقترح Zellner-Geisel 1968 الطريقة التالية:

(1) نضع المعادلة (63.7) على الشكل:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \phi Y_{t-1} + (u_t - \phi u_{t-1})$$

$$(Y_t - u_t) = \beta_1 + \beta_2 X_t + \phi(Y_{t-1} - u_{t-1})$$

ثم نكتب:

$$a_t = Y_t - u_t$$

$$a_{t-1} = Y_{t-1} - u_{t-1}$$

$$a_t - \phi a_{t-1} = (Y_t - \phi Y_{t-1}) - (u_t - \phi u_{t-1}) = \beta_1 + \beta_2 X_t$$

ومنه نجد:

$$a_t = \phi a_{t-1} + \beta_1 + \beta_2 X_t \dots (7.68)$$

(2) نواصل التعويض عن a في الطرف الأيمن للمعادلة (68.7) أعلاه لنجد:

$$a_t = a_0 \phi^t + \beta_1 (1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{t-1}) + \beta_2 (X_t + \phi X_{t-1} + \dots + \phi^{t-1} X_1)$$

ولنعوض عن $a_t = Y_t - u_t$ لنجد:

$$Y_t = a_0 \phi^t + \beta_1 \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j + \beta_2 \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j X_{t-j} + u_t \dots (7.69)$$

وهو نموذج بدلالة المجاهيل $a_0, \beta_1, \beta_2, \phi$. وإقترح هاذين الباحثين تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على هذا النموذج بأخذ قيم مختلفة للمعلمة ϕ في المجال $0 < \phi < 1$. حيث يختاران النموذج الذي يعطي أصغر قيمة لمجموع مربعات البواقي RSS.

- أما Harvey 1981 (7) فيقترح بناء دالة المعقولية للمعادلة (63.7) بأخذ النموذج المحول لهذه الأخيرة على الشكل:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + (u_t - \phi u_{t-1}) \dots (7.70)$$

وباعتبار $\phi = \beta_3$ عند التحويل الهندسي لنموذج Koyck تصبح المعادلة

المحولة كما يلي:

$$u_t = Y_t - \beta_1 - \beta_2 X_t - \phi Y_{t-1} + \phi u_{t-1} \dots (7.71)$$

$$t = 2, 3, \dots, n$$

وبأخذ المعادلة (70.7) كنقطة إنطلاق، نستطيع حساب مجموعة أخطاء التنبؤ من التراجع recursive للمعادلة (71.7). ثم من خلال إفتراض Y_1 ثابتة، $u_1 = 0$ ، وتجزئة (8) خطأ التنبؤ، يكون تعظيم دالة المعقولية للمعادلة (70.7)، والتي هي على الشكل:

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \sigma_u^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2} \sum u_t^2 \dots (7.72)$$

متكافئ مع تصغير مجموع دالة المربعات $\sum_{t=2}^n u_t^2$. وباشتقاق (71.7) بالنسبة للمعالم الغير معروفة نجد:

$$\frac{\partial u_t}{\partial \beta_1} = -1 + \phi \frac{\partial u_{t-1}}{\partial \beta_1}$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial \beta_2} = -X_t + \phi \frac{\partial u_{t-1}}{\partial \beta_2}$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial \phi} = -Y_{t-1} + u_{t-1} + \phi \frac{\partial u_{t-1}}{\partial \phi} \quad t = 2, 3, \dots, n$$

ومن أجل الحصول على توزيع تقاربي لمقدرات المعقولية العظمى للمعالم $(\sigma_u^2, \phi, \beta_2, \beta_1)$ ، يجب فرض شروط نظامية معينة على X_t . وبدراسة المشتقات المذكورة أعلاه، نلاحظ أن ذلك يحتوي على تقييم الحدود المحتوية على Y_t, u_t, X_t . ومنه يمكن كتابة هذه المشتقات الجزئية، على الترتيب، على الشكل:

8- أنظر: A.C. Harvey 1981, PP101-107 (مرجع سابق).

$$i)(1 - \phi L) \frac{\partial u_t}{\partial \beta_1} = -1 \Rightarrow Z_{1t} = -\frac{\partial u_t}{\partial \beta_1} = \frac{1}{1 - \phi L}$$

$$ii)(1 - \phi L) \frac{\partial u_t}{\partial \beta_2} = -X_t \Rightarrow Z_{2t} = -\frac{\partial u_t}{\partial \beta_2} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j X_{t-j}$$

$$iii)(1 - \phi L) \frac{\partial u_t}{\partial \phi} = -(Y_{t-1} - u_{t-1}) \Rightarrow Z_{3t} = \frac{(Y_{t-1} - u_{t-1})}{1 - \phi L} = -\beta_2 \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \phi^j X_{t-j-1}$$

حيث أن Y_1 مثبتة و $u_1 = 0$. وهو ما يعبر عن نظام المرتبة الأولى للمتوسط المتحرك $MA(1)$. ومنه يمكن الحصول على عبارة لمصفوفة المعلومات التقريبية والتي تحتوي فقط ⁽⁹⁾ على X_t , ϕ , σ_u^2 , β_1 , β_2 كما في المعادلة (69.7). وبالنظر إلى نتائجنا أعلاه مع المعادلة (69.7)، يمكن إعادة كتابة المعادلة (71.7) على الشكل:

$$u_t = Y_t - a_0 \phi^t - \beta_1 \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j - \beta_2 \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j X_{t-j}$$

أو على الشكل:

$$u_t = Y_t - \beta_1 Z_{1t} - \beta_2 Z_{2t} - \beta_3 Z_{3t}$$

3-4-7 المتغير التابع المؤخر مع الارتباط الذاتي للأخطاء

نواصل مع العلاقة (63.7) عندما تكون الأخطاء V_t مرتبطة ذاتيا في شكلها العام على النحو:

$$V_t = \phi V_{t-1} + \varepsilon_t \dots (7.73)$$

$$E(\varepsilon_t) = 0, \text{ var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \cdot I \quad \text{حيث أن:}$$

إن هذه الفرضية لها أثر مهم. فمن المعادلة (73.7) نلاحظ أن V_{t-1} تؤثر على V_t ، لكن من (63.7)، في الفترة $t-1$ ، نلاحظ أن V_{t-1} تؤثر على Y_{t-1} . وهذا يجعل V_t و Y_{t-1} غير مستقلين في العلاقة (63.7) أي أن:

$$E(Y_{t-1} V_t) \neq 0$$

⁹ - أنظر: J. Johnston 1984 Page 369 (مرجع سابق).

ومنه، بالإعتماد على المعادلتين (63.7) و (73.7) ينتج أن:

$$\text{plim}\left(n^{-1} \sum Y_{t-1} V_t\right) = \frac{\phi \sigma_v^2}{1 - \beta_3 \phi}$$

وهذا يعني أن تطبيق طريقة المربعات الصغرى على المعادلة (63.7) يعطي مقدرات غير متسقة لكل المعالم. لأنه من المعادلة (66.7) مع الفرضية (73.7) لدينا:

$$\text{plim}(\hat{\beta}) = \beta Q_{ww}^{-1} \cdot \text{plim}(n^{-1} W' V) \neq \beta$$

لأن:

$$\begin{aligned} \text{plim}(n^{-1} W' V) &= \begin{bmatrix} \text{plim}(n^{-1} \sum V_t) \\ \text{plim}(n^{-1} \sum X_t V_t) \\ \text{plim}(n^{-1} \sum Y_{t-1} V_t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\phi \sigma_v^2}{1 - \beta_3 \phi} \end{bmatrix} \dots\dots (7.74) \end{aligned}$$

وللخروج من هذه الحالة الخاصة، هناك طرق عديدة لتفادي هذا المشكل أين نلاحظ أن المربعات الصغرى العادية تعطي مقدرات غير متسقة في النموذج الديناميكي مع إرتباط الأخطاء عبر الزمن. ومن بين الطرق هو تطبيق المربعات الصغرى المعممة (والمقترحة بالفصل السادس) وسوف نكتفي هنا بذكر طريقة Wallis لتقدير ϕ وهي كما يلي:

(a) إستعمل X_{t-1} كأداة لـ Y_{t-1} في العلاقة (63.7)، وطبق قانون المربعات الصغرى العادية على الشكل:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

(b) تحصل على البواقي $\hat{\varepsilon}_t$ ، ثم أحسب القيم المتتالية:

$$r_{\hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t+1}} = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} / (n-1)}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t / n} + \frac{k}{n}$$

حيث أن k هو عدد المعالم في النموذج (هنا $k=3$). نستعمله لتصحيح التحيز.

(c) إستعمل $r_{\hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t+1}}$ لتقدير ϕ ، ولتكن $\tilde{\phi}$ ، ثم طبق المربعات الصغرى العادية على النموذج المحول:

$$(Y_t - \tilde{\phi}Y_{t-1}) = \beta_1^* + \beta_2^*(X_t - \tilde{\phi}X_{t-1}) + \beta_3^*(Y_{t-1} - \tilde{\phi}Y_{t-2}) + \varepsilon_t$$

في الأخير، يمكن أن نقترح طريقتين مهمتين من أجل الحصول على مقدرات متسقة بالنسبة لنموذج المعادلتين (63.7) و (73.7)، وهما طريقتي المتغيرات الأدواتية (IVE) والمعقولة العظمى (MLE).

1-3-4-7 التقدير بالمتغيرات الأدواتية

إقترحنا بالفصل الخامس (نظرية العينات الكبيرة)، مقدرات للمتغيرات الأدواتية أما كان هناك محذر أو أكثر من المحدرات مرتبطا مع حد الأخطاء في النهاية، وهي الحالة نفسها التي تواجهها بنموذج المعادلتين (63.7) و (73.7) مجتمعين.

مبدئيا، تعتمد طريقة المتغيرات الأدواتية على إيجاد متغير أداتي لكل المحدرات الموجودة بالمعادلة (63.7). حيث إذا كانت X_t غير عشوائية، وتوزيعات تأخيرها خارجية ينتج لدينا $\text{plim}(n^{-1}W'V) \neq 0$ كما هو مبين بالعبارة (74.7). لأن المقدار $\text{plim}(n^{-1}\sum Y_{t-1}V_t) \neq 0$ وبالتالي نحتاج إلى إيجاد متغير أداتي يكون مرتبطا مع Y_{t-1} وغير مرتبط مع حد الأخطاء V_t نهائيا. ومادامت Y_t مشروحة جزئيا بواسطة X_t ، ينتج أن Y_{t-1} تكون، كذلك، مشروحة

جزئيا بواسطة X_{t-1} . إن هذا الإستنتاج يقترح علينا إستعمال X_{t-1} كمتغير أداتي $- Y_{t-1}$.

فإذا عدنا للمعادلة (66.7)، وضربنا طرفيها بالمصفوفة W' نجد:

$$W'Y = W'W\beta + W'V \dots (7.75)$$

ونظرا للعبارة (74.7) التي تختلف عن الصفر، فإنه من غير الممكن الحصول على مقدار متسق للمعادلة (75.7). ومنه، كما ذكرنا أعلاه، نبحث عن مصفوفة $Z, n \times k$ ، تحتوي على المتغيرات التي نظن أنها مرتبطة مع حد الأخطاء ونفرض أن:

$$E(Z_{jt} V_t) = 0 \dots (7.76)$$

$$t = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, k$$

وفي هذه الحالة تكون:

$$Z_{jt} = (1 \quad X_t \quad X_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, 3$$

وبضرب المعادلة (66.7)، من جديد، بالمصفوفة Z' مع الفرضية $\text{plim}(n^{-1}Z'V) = 0$ وتطبيق المربعات الصغرى العادية على النتيجة نحصل على مقدار المتغيرات الأداة (IVE)، \tilde{b} كما في الفصل الخامس على الشكل:

$$\tilde{b} = (Z'W)^{-1}Z'Y \dots (7.77)$$

وبتطبيق شروط نظرية Mann-Wald:

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \text{plim}(n^{-1}Z'W) = Q_{ZW} \\ \text{ii) } \text{plim}(n^{-1}Z'V) = 0 \end{array} \right\} \dots (7.78)$$

مع Q_{ZW} مصفوفة محددة موجبة، نحصل على عبارة تبين بأن مقدار (IVE) \tilde{b} هو مقدار متسق كما يلي:

$$\text{plim}(\tilde{b}) = \beta + \text{plim}(n^{-1}Z'W)^{-1} \cdot \text{plim}(n^{-1}Z'V) \\ = \beta + Q_{ZW}^{-1} \cdot 0 = \beta$$

نقول، يتم الحصول على المقدّر \tilde{b} بواسطة تقدير Y_t في X_{t-1}, X_t وحد ثابت. ثم نأخذ القيم التقديرية \hat{Y}_{t-1} ، لنحدر مرة ثانية Y_t في X_t, \hat{Y}_{t-1} وحد ثابت. وفي مثالنا بالمعادلة (63.7) نجد $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ وبمعرفة المصفوفتين Z, W على أنهما:

$$W_t = (1 \quad X_t \quad Y_{t-1}) \\ Z_t = (1 \quad X_t \quad X_{t-1})$$

فإنه يمكن إعادة كتابة المعادلة (77.7) على الشكل:

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_t & \sum Y_{t-1} \\ \sum X_t & \sum X_t^2 & \sum X_t Y_t \\ \sum X_{t-1} & \sum X_t X_{t-1} & \sum X_{t-1} Y_{t-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_t Y_t \\ \sum X_{t-1} Y_t \end{bmatrix}, t = 1, 2, \dots, n$$

وإذا كانت Y_0, X_0 غير موجودتين تصبح $t=2, 3, \dots, n$ وبوجود الفرضية (76.7) مع توفر شروط نظرية Mann-Wald بالمعادلة (78.7)، بالإضافة للفرضيات:

$$\text{plim}(n^{-1}Z'Z) = Q_{ZZ}$$

$$E(V) = 0, \quad E(VV') = \sigma_v^2 I_n$$

مع Q_{ZZ} مصفوفة محددة موجبة، يمكن مناقشة الخصائص التقاربية لمقدّر المتغيرات الأداة، حيث يكون تبعا للمعادلة (78.7) لدينا:

$$n^{-1/2}Z'V \xrightarrow{D} \eta \sim N(0, \sigma_v^2 Q_{ZZ})$$

ثم بإعادة كتابة مقدّر (IVE)، بالمعادلة (77.7) على الشكل:

$$\tilde{b} = \beta + (Z'W)^{-1}Z'V$$

$$\sqrt{n}(\tilde{b} - \beta) = (n^{-1}Z'W)^{-1}(n^{-1/2}Z'V) \quad \text{فإن:}$$

وباستعمال النتيجة الأولى للمعادلة (78.7)، ونظرية Cramer (من الفصل الخامس) نجد:

$$\sqrt{n}(\tilde{b} - \beta) \xrightarrow{D} \eta Q_{ZW}^{-1} \sim N \left[0, \sigma_v^2 Q_{ZW}^{-1} Q_{ZZ} Q_{ZW}^{-1} \right]$$

وفي العينات الكبيرة تكون:

$$(\tilde{b} - \beta) \overset{A}{\sim} N \left[0, \sigma_v^2 n^{-1} Q_{ZW}^{-1} \cdot Q_{ZZ} \cdot Q_{ZW}^{-1} \right]$$

ليكون \tilde{b} تقاربيا له التوزيع الطبيعي بالنسبة للعينات الكبيرة.

$$\tilde{b} \overset{A}{\sim} N \left[\beta, \sigma_v^2 n^{-1} Q_{ZW}^{-1} \cdot Q_{ZZ} \cdot Q_{ZW}^{-1} \right] \dots (7.79)$$

وليكون مقدار التباين المناسب للعبارة (77.7) على الشكل:

$$\text{var}(\tilde{b}) = \hat{\sigma}_v^2 (Z'W)^{-1} (Z'Z) (W'Z)^{-1} \dots (7.80)$$

حيث أن:

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{n - k} (Y - X\tilde{b})' (Y - X\tilde{b}) \quad (10)$$

إن نتيجة المعادلات من (77.7) إلى (80.7) تعطي مقدرات متسقة، وتصلح للعينات الكبيرة فقط إذا كانت الأخطاء مستقلة ومتماثلة التوزيع (11).

10- أنظر الفصل الخامس، فقرة المتغيرات الأداة.

11- أنظر:

i) J.Stewart "Econometrics" University press Cambridge, U.K 1991, PP:190-192.

ii) A.C Harvey 1981, Page 236 (مرجع سابق)

2-3-4-7 التقدير بطريقة المعقولية العظمى

إن توفيق المعادلتين (63.7) و (73.7) يعطي النموذج:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + V_t$$

$$V_t = \phi V_{t-1} + \varepsilon_t$$

وبتعويض أثر V_t ، عن طريق تأخير (63.7) بفترة زمنية واحدة وضربها بالمعلمة ϕ ثم طرح الناتج من (63.7)، يعطي:

$$Y_t - \phi Y_{t-1} = \beta_1(1 - \phi) + \beta_2(X_t - \phi X_{t-1}) + \beta_3(Y_{t-1} - \phi Y_{t-2}) + \varepsilon_t \dots (7.81)$$

لنحصل على المعادلة:

$$Y_t = \beta_1(1 - \phi) + \beta_2 X_t - \beta_2 \phi X_{t-1} + (\beta_3 + \phi) Y_{t-1} - \beta_3 \phi Y_{t-2} + \varepsilon_t \dots (7.82)$$

$$t = 3, 4, \dots, n$$

وإذا كانت الأخطاء، ε_t ، تتصرف جيدا ولها التوزيع الطبيعي مع

$\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_n)$ ، فيمكن الحصول على مقدرات المعقولية العظمى (MLE)

للمعالم $(\beta_3, \beta_2, \beta_1, \phi, \sigma_\varepsilon^2)$ عن طريق تصغير (تدنية) مجموع مربعات الدالة $\sum \varepsilon_t^2$.

إن معاينة بسيطة للمعادلة (81.7) تجعلنا نقترح إعطاء قيم بدائية للمعلمة

ϕ من أجل الحصول على المتغيرات المحولة في هذه المعادلة. ومن ثم نطبق قانون

المربعات الصغرى على هذه الأخيرة للحصول على مقدرات المعالم $(\beta_3, \beta_2, \beta_1)$.

كما يمكننا الاحتفاظ بهذه المقدرات لتعويضها بمعادلة البيانات المحولة:

$$(Y_t - \beta_1 - \beta_2 X_t - \beta_3 Y_{t-1}) = \phi(Y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 X_{t-1} - \beta_3 Y_{t-2}) + \varepsilon_t \dots (7.83)$$

من أجل تطبيق قانون المربعات الصغرى على المعادلة (81.7) ثانية لينتج:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum [Y_{t-1} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{t-1} - \hat{\beta}_3 Y_{t-2}] [Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_t - \hat{\beta}_3 Y_{t-1}]}{\sum [Y_{t-1} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{t-1} - \hat{\beta}_3 Y_{t-2}]^2}$$

$$= \frac{\sum \hat{U}_t \hat{U}_{t-1}}{\sum \hat{U}_{t-1}^2}$$

حيث أن (83.7) متكافئة مع (73.7). ونواصل العملية إنطلاقاً من القيمة المراجعة لـ $\hat{\phi}$ ، ثم نعوضها بالمعادلة (81.7) لتستمر طريقة التكرار لكوكران-أوركات حتى يحدث التقارب. ونلاحظ أن هذه الطريقة متشابهة مع الطريقة المقترحة من طرف Wallis في بداية الفقرة أعلاه، (3.4.7)، ولكن يظهر من عملية التكرار المذكورة أعلاه أن طريقة كوكران-أوركات يمكن أن تعطي مقدرات غير متسقة. حيث يمكن لنقطة الإنطلاق بالنسبة لـ ϕ ، أن تبدأ من $\phi = 0$ ، والذي يعود بنا من المعادلتين (82.7) و (83.7)، مباشرة إلى المعادلة (63.7) والتي ناقشنا مشاكل تقديرها من قبل. ولهذا يقترح البعض، تصغير $\sum \varepsilon_t^2$ بالمعادلة (82.7) (غير خطية في المعالم)، وفقاً لطريقة البحث بمجال لقيم ϕ . ووضع $-1 < \phi < 1$ ، ثم استعمال كل قيمة ممكنة من هذا المجال لحساب شبه الفروقات بالمعادلة (81.7)، ومن ثم تطبيق المربعات الصغرى على (81.7) عند كل قيمة لـ ϕ بتصغير $\sum \hat{\varepsilon}_t^2$ يجعلنا نختار الإنحدار الذي يعطي أصغر RSS، حيث أن تصغير $\sum \hat{\varepsilon}_t^2$ متكافئ مع تعظيم دالة المعقولية لما تكون الأخطاء موزعة طبيعياً مع Y_1, Y_2 مثبتتين بالمعادلة (82.7).

ومنه نقول، أن إيجاد عبارة مناسبة لمصفوفة المعلومات (12) يكون عن طريق بناء دالة المعقولية للمعادلة (82.7). ثم اشتقاق اللوغاريتم الطبيعي لهذه الأخيرة بالنسبة للمعالم $(\beta_3, \beta_2, \beta_1, \phi, \sigma_\varepsilon^2)$.
مثال (7.7): لنعتبر النموذج التالي:

$$\left. \begin{aligned} Y_t &= \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + V_t \\ V_t &= \phi V_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \right\} \dots (7.84)$$

i) A.C. Harvey 1981 Page 243 (مرجع سابق)

ii) J. Johnston 1984 Page 367 (مرجع سابق)

مع الأخطاء مستقلة، متماثلة التوزيع، بوسط مساو للصفر وتباين هو σ_ε^2 . إن المعادلة المحولة (84.7) هي:

$$Y_t - \phi Y_{t-1} = \beta_1 X_t - \beta_1 \phi X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1} - \beta_2 \phi Y_{t-2} + \varepsilon_t \dots (7.85)$$

$$t = 2, \dots, n$$

أو نكتبها على الشكل:

$$Y_t = (\beta_2 + \phi) Y_{t-1} - \beta_2 \phi Y_{t-2} + \beta_1 X_t - \beta_1 \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \dots (7.86)$$

حيث أن هذا الشكل الأخير غير خطي في المعالم (ϕ, β_2, β_1) . ويمكن استعمال طريقة المربعات الصغرى غير الخطية لتصغير الدالة:

$$S(\beta_1, \beta_2, \phi) = \sum [Y_t - (\beta_2 + \phi) Y_{t-1} + \beta_2 \phi Y_{t-2} - \beta_1 X_t + \beta_1 \phi X_{t-1}]^2$$

إن هذه الطريقة هي تقريب لطريقة المعقولة العظمى، المتحدث عنها أعلاه، ونستعمل طريقة Gauss-Newton لتقدير الدالة S عن طريق تحديد البواقي المحصلة عند كل تكرار لطريقة (G-N)، $\hat{\varepsilon}_t$ على المتغيرات المعروفة مثل $[-\partial \varepsilon_t / \partial \phi, -\partial \varepsilon_t / \partial \beta_2, -\partial \varepsilon_t / \partial \beta_1]$ والمقاسة عند القيم الحالية (الجارية) للمقدرات. وباشتقاق ε_t بالنسبة لكل معلمة، فإن متغيرات المعادلة تظهر على أنها $\hat{Y}_{t-1}^*, \hat{X}_t^*, \hat{V}_{t-1}$ حيث أن:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Y}_{t-1}^* &= Y_{t-1} - \hat{\phi} Y_{t-2} \\ \hat{X}_t^* &= X_t - \hat{\phi} X_{t-1} \\ \hat{V}_{t-1} &= Y_{t-1} - \hat{\beta}_1 X_{t-1} - \hat{\beta}_2 Y_{t-2} \end{aligned} \right\} \dots (7.87)$$

ثم نراجع المقدرات $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\phi}$ ، في كل تكرار، وبالتالي نراجع كذلك المتغيرات المحولة بالمعادلة (87.7). وإذا واصلنا طريقة التكرار لـ (G-N) حتى يحدث التقارب، فإن القيم النهائية للمتغيرات المحولة بالمعادلات (87.7) يمكن استعمالها كأنها محدرات في حساب المربعات الصغرى الخطية.

5-7 نماذج التأخير العقلاني Rational Lag Models

بالرجوع إلى هيكل التأخير العقلاني العام بالمعادلة (27.7):

$$A(L)Y_t = \alpha + B(L)X_t + u_t$$

حيث أن $A(L)$ و $B(L)$ كثيري حدود معرفين من قبل، وبإعادة الترتيب نكتب:

$$Y_t = \delta + \frac{B(L)}{A(L)}X_t + V_t \dots (7.88)$$

حيث أن:

$$\delta = \frac{\alpha}{A(L)}, \quad V_t = \frac{u_t}{A(L)}$$

يمكن تصغير دالة المربعات $\sum V_t^2$ بالنسبة للعالم β_i, a_j [$i = 0, 1, \dots, s, j = 0, 1, \dots, p$] بدون إستعمال المشتقات التحليلية رغم أن هناك ضياع t^* بواقعي بواسطة إنطلاق التراجع عند النقطة $t = t^* + 1$. حيث أن $t = t^* + 1, t^* + 2, \dots, n$ ، $t^* = \max(s, p)$ ، و $u_t = 0$ من أجل $t = t^* + 1 - p, t^* + 2 - p, \dots$ وإذا كانت الأخطاء u_t تتبع نظام الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك من الشكل $ARMA(p, q)$ فإنه يمكن صياغة النموذج أعلاه على الشكل:

$$Y_t = \frac{B(L)}{A(L)}X_{t-m} + \frac{\theta(L)}{\phi(L)}V_t \dots (7.89)$$

وتعرف هذه المعادلة على أنها دالة تحويل. حيث يمثل الحد الأول ليمين المعادلة (89.7) الديناميكية النظامية Systematic Dynamic، بينما يمثل الحد الثاني ديناميكية الأخطاء (العشوائية) وهي تتعلق بنماذج السلاسل الزمنية $ARMA(p, q)$. وهو ما يسمى بنماذج ARMAX أو نماذج $ARMA(p, q)$ المحتوية على متغيرات مفسرة خارجية أو معادلات الفرق العشوائية. ويمكن توسيع نماذج توزيع التأخير المذكورة سابقا إلى نماذج تحتوي على عدة متغيرات مفسرة إضافية وغير ديناميكية مثل:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_{1t} + \beta_1 X_{1,t-1} + \dots + \beta_s X_{1,t-s} + \gamma X_{2t} + u_t$$

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^s \beta_i X_{1,t-i} + \gamma X_{2t} + u_t \dots (7.90)$$

وباستعمال فرضية توزيع التأخير الهندسي لـ Koyck نجد:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{1,t-i} + \gamma X_{2t} + u_t \dots (7.91)$$

لتكون المعادلة المحولة على الشكل:

$$Y_t = \alpha(1 - \lambda) + \beta_0 X_{1t} + \lambda Y_{t-1} + \gamma X_{2t} + \lambda \gamma X_{2,t-1} + V_t \dots (7.92)$$

حيث أن:

$$V_t = u_t - \lambda u_{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots, n$$

ويصبح مشكل التقدير معقدا أكثر إذا وجدت علاقة ديناميكية بين X_2

و Y . وإذا كان هيكل توزيع التأخير للمتغير المفسر X_2 له توزيع تأخير Koyck تصبح المعادلة (7.90) على النحو:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i X_{1,t-i} + \gamma_0 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^i X_{2,t-i} + u_t \dots (7.93)$$

أو على الشكل:

$$Y_t = \frac{\beta_0 X_{1t}}{1 - \lambda_1 L} + \frac{\gamma_0 X_{2t}}{1 - \lambda_2 L} + u_t \dots (7.94)$$

ومنه نستنتج النموذج العام لهذه الحالة على الشكل:

$$Y_t = \frac{B_1(L)}{A_1(L)} X_{1t} + \frac{B_2(L)}{A_2(L)} X_{2t} + u_t$$

والتي يمكن صياغتها بالشكل التالي:

$$Y_t = D_1(L) X_{1t} + D_2(L) X_{2t} + u_t$$

وتبعاً لـ Hendry-Richard (1983)، يمكن للمعادلة (7.63) أن تمثل 9

حالات خاصة وذلك بوضع بعض القيود على المعالم وإحداث تغييرات جزئية في شكلها. حيث نكتبها في صيغة ADL(1,1) على الشكل:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + a_1 Y_{t-1} + V_t \dots (7.95)$$

حيث نلاحظ أن المعادلة (63.7) هي في شكل $ADL(1,0)$ وبمعرفة

$$D(L) = B(L)/A(L)$$

يمكن صياغة (63.7) على الشكل:

$$Y_t - \beta_3 Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_t + V_t$$

$$(1 - \beta_3 L) Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + V_t$$

$$Y_t = \frac{\beta_1}{(1 - \beta_3 L)} + \frac{\beta_2}{(1 - \beta_3 L)} X_t + \frac{1}{(1 - \beta_3 L)} V_t$$

$$Y_t = \alpha + \frac{B(L)}{A(L)} X_t + u_t$$

حيث أن:

$$\alpha = \beta_1 / (1 - \beta_3 L)$$

$$V_t = u_t / (1 - \beta_3 L)$$

$$B(L) = \beta_2$$

$$A(L) = 1 - \beta_3 L : |\beta_3| < 1$$

أما بالنسبة للمعادلة (95.7) والمقترحة من طرف هذين الباحثين، فيمكن إعادة صياغتها على الشكل:

$$Y_t - a_1 Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + V_t$$

$$(1 - a_1 L) Y_t = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3 L) X_t + V_t$$

$$A(L) Y_t = \beta_1 + B(L) X_t + V_t$$

$$Y_t = \alpha + D(L) X_t + u_t \dots (7.96)$$

حيث أن:

$$D(L) = B(L)/A(L)$$

$$B(L) = \beta_2 + \beta_3 L$$

$$A(L) = 1 - a_1 L : |a_1| < 1$$

$$\alpha = \beta_1 / A(L)$$

$$u_t = V_t / A(L)$$

ونورد الآن التشكيلات الممكنة للمعادلة (95.7) (13)

(1) الإنحدار الساكن $a_1 = \beta_3 = 0$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + V_t$$

(2) الإنحدار الذاتي من المرتبة الأولى AR(1): $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + V_t$$

(3) نموذج معدل النمو: $a_1 = 1, \beta_2 = -\beta_3, \beta_1 = 0$

$$\Delta Y_t = \beta_2 \Delta X_t + V_t$$

(4) نموذج التأشير: $\beta_1 = 0, \beta_2 = a_1 = 0$

$$Y_t = \beta_3 X_{t-1} + V_t$$

(5) نموذج توزيع التأخير النهائي: $a_1 = 0$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + V_t$$

(6) نموذج التعديل الجزئي: $\beta_3 = 0$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + a_1 Y_{t-1} + V_t$$

(7) نموذج تصحيح الأخطاء (14): $\beta_1 = 0, \beta_2 + \beta_3 + a_1 = 1$

$$\Delta Y_t = \beta_2 \Delta X_t + (1 - a_1)(X_{t-1} - Y_{t-1}) + u_t$$

(8) نموذج "الإنطلاقة الميتة": $\beta_1 = \beta_2 = 0$

$$Y_t = \beta_3 X_{t-1} + a_1 Y_{t-1} + u_t$$

(9) نموذج الأخطاء للإنحدار الذاتي: $a_1 \beta_2 + \beta_3 - \beta_1 = 0$

$$Y_t = \beta_2 X_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = a_1 \varepsilon_{t-1} + V_t$$

A. Spanos "Statistical foundations of Econometric modelling"

13- أنظر:

Cambridge University Press U.K 1986, PP: 551-554

i) A.C. Harvey 1981, PP: 287-292 (مرجع سابق)

14- أنظر:

ii) J.Stewart 1991, PP: 198-199 (مرجع سابق)

6-7 سلسلة تمارين حول الفصل السابع:

التمرين الأول:

بالنسبة لنماذج توزيع التأخير الآتية، إحصب المضاعف الفوري، المضاعف الطويل المدى وسط التأخير، متوسط التأخير إن أمكن.

$$a) Y_t = 8X_{t-3} + u_t$$

$$b) Y_t = 0.75X_t + 0.5X_{t-1} + 0.25X_{t-3} + u_t$$

$$c) Y_t = 0.1X_{t-1} + 0.2X_{t-2} + 0.3X_{t-3} + 0.2X_{t-4} + 0.1X_{t-5} + u_t$$

$$d) Y_t = 1.5X_t + 0.7X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + u_t$$

التمرين الثاني:

في دراسة الطاقة الإنتاجية، قدر Choyck معادلة من الشكل:

$$Y_t = \alpha + (\beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \beta_2 \lambda X_{t-2} + \beta_2 \lambda^2 X_{t-3} + \dots) + u_t$$

- (a) حول هذه المعادلة إلى معادلة تحتوي عدد نهائيا من قيم X .
- (b) بين كيف يمكن تقدير المعالم الأربعة غير المعروفة.
- (c) بين بأن معادلة نهائية تحتوي على نفس المتغيرات يمكن اشتقاقها من فرضية التعديل الجزئي. حيث أن المستوى المفضل لـ Y_t يعتمد على X_t و X_{t-1} .
- (d) بين لماذا أن الطريقة المختارة من طرفك في (b) تعطي مقدرات متسقة، وأكتب الفرضيات الضرورية التي تحتاجها في إجراء عملية التقدير.
- (e) أوجد الوقت اللازم لكي يكون التغير الإجمالي في Y والناتج عن تغير X 90% تماما.

(f) طبق (b)، (d)، (e) على البيانات الآتية:

$$\begin{aligned} \sum X_t^2 &= 50 & \sum X_t X_{t-1} &= 48, & \sum X_t Y_t &= 10.2, \\ \sum X_t Y_{t-1} &= 10, & \sum X_{t-1} Y_t &= 9.9, & \sum X_{t-1} Y_{t-1} &= 9.8 \\ & & t &= 2, \dots, n \end{aligned}$$

(g) إستنتج المعالم γ من أجل توزيع التأخير على الشكل:

$$D(L) = B(L)/A(L)$$

حيث أن:

$$A(L) = 1 - a_1L - a_2L^2$$

$$B(L) = \beta_0 + \beta_1L$$

وإشتق عبارة لوسط التأخير في هذا النظام.

(h) أوجد المضاعف الإجمالي، وسط التأخير، ومعالم X_{t-j} ، $j=0,1,2,3$ في نموذج توزيع التأخير العقلاني التالي:

$$Y_t = \frac{3L}{1 - 0.9L + 0.2L^2} \cdot X_t + V_t$$

(i) تحدث بالتفصيل عن طريقة التقدير لـ Almon لما $Y = f(X)$ تكون لها 4 تأخيرات خارجية، ودرجة كثير الحدود هي $r=3$.

(j) نعرف من النظرية الاقتصادية أن مستوى الإستهلاك الحالي يتأثر بمستويات الدخل الحالية والماضية على الشكل:

$$C_t = f(Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots, u_t)$$

إستعمل تحويل Koyck لتشتق نموذج مناسب لدالة الإستهلاك أعلاه، ثم وضع فرضيات تحويل Koyck، وتحدث عن مصداقية هذه الفرضيات بالنسبة لنموذج دالة الإستهلاك.

(k) ليكن عدد التأخيرات للنموذج أعلاه، في (j) هو $s=8$ ، وليكن عدد المعالم غير المعروفة β_i هو $s+1=9$ ، ونفرض أن الحد الثابت α يبقى موجودا. فإذا كان هناك مستثمر يريد تقدير هذا النموذج بواسطة طريقة Almon مع كثير حدود من الدرجة $r=4$ ، مستعملا عينة من 60 ملاحظة ليحصل على مقدرات تقريب كثير الحدود التالية:

$$\hat{a}_0 = 0.5, \hat{a}_1 = 2.5, \hat{a}_2 = 2, \hat{a}_4 = 5$$

أحسب قيم معالم نموذج توزيع التأخير الأصلي $\hat{\beta}_i$.

التمرين الثالث:

في نظام المعادلات الديناميكية وغير العشوائية الآتية، أحصل على الشكل المختصر والمعادلة النهائية لـ Y_t ، وأبحث في شروط إستقرار النموذج.

(a) النظام الأول:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + \gamma C_{t-1}$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

المتغيرات الداخلية هي C_t و Y_t ، والمتغيرات الخارجية هي I_t .

(b) النظام الثاني:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$I_t = \gamma \Delta Y_t + G_t$$

المتغيرات الداخلية هي C_t ، Y_t ، I_t ، المتغيرات الخارجية هي G_t .

حيث أن:

C_t ، Y_t ، I_t ، G_t هي، على التوالي، الإستهلاك، الدخل، الإستثمار والإتفاق الحكومي.

التمرين الرابع:

لنعتبر نموذج توزيع التأخير التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$$

مع الأخطاء تأخذ نظام المرتبة الأولى من الارتباط الذاتي AR(1) على النحو:

$$u_t = \phi u_{t-1} + V_t$$

حيث V_t يحقق الفرضيات الكلاسيكية العشوائية "نمو اضطراب أبيض" White noise مع الخصائص

$$V \sim N(0, \sigma_V^2 I)$$

$$E(V_t V_s) = 0, \quad t \neq s$$

- (a) ماهي خصائص المقدرات إذا طبقنا طريقة المربعات الصغرى العادية
 (b) تحدث عن طرق التقدير الممكنة للنموذج أعلاه، والتي تعطي مقدرات أحسن من تلك المحصلة في (a) بواسطة المربعات الصغرى.
 (c) هل يمكن تحقيق مقدرات غير متحيزة بواسطة أية طريقة في القياس الإقتصادي؟ ولماذا.
 (d) إذا كانت لدينا القيود $\alpha = \beta_1 = \beta_2 = 0$ مع نظام المرتبة الأولى للمتوسط المتحرك MA(1) على الشكل:

$$u_t = V_t + \phi V_{t-1}$$

مع الفرضيات: $V \sim N(0, \sigma_v^2 I)$ ، ونريد تقدير المعلمة β_3 بواسطة القانون:

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\sum Y_t Y_{t-1}}{\sum Y_{t-1}^2} : |\beta_3| < 1$$

بين صحة العبارتين التاليتين:

$$i) \text{plim}(\hat{\beta}_3) = \beta_3 + \frac{\theta(1 - \hat{\beta}_3^2)}{1 + 2\beta_3\theta}$$

حيث أن $\theta = \phi / (1 + \phi^2)$

$$ii) \text{plim}(n^{-1} \sum \hat{u}_t^2) = \sigma_v^2 [1 + \phi(\phi - \phi^*)]$$

حيث أن:

$$\phi^* = \theta(1 - \beta_3^2) / [1 + 2\beta_3\theta]$$

$$\hat{u}_t = Y_t - \hat{\beta}_3 Y_{t-1}$$

- (e) إذا كانت $\beta_3 = 0$ ، X_{1t} و X_{2t} لهما توزيعات تأخير من المرتبتين s_1 ، s_2 على معالم محدودة. اقترح طريقة مناسبة لتقدير هذه المعالم.

- (f) في السؤال (e) إذا أضفنا، كذلك، توزيع التأخير للمتغير التابع Y_t من المرتبة P فأكتب النموذج على الشكل:

$$\text{i) } A(L)Y_t = \alpha + \sum_{j=1}^2 B_j(L)X_{jt} + u_t$$

$$\text{ii) } Y_t = \alpha' + \sum \frac{B_j(L)}{A(L)} X_{jt} + V_t$$

$$\text{iii) } Y_t = \alpha' + \sum D_j(L)X_{jt} + V_t$$

مبيننا مكونات كل من α' ، $B_j(L)$ ، $A(L)$ ، $D_j(L)$.

الفصل الثامن:

نماذج السلاسل الزمنية: Time Series Models

مقدمة:

تطرقنا في الفصول السابقة لعدة أنواع من النماذج منها: نماذج الإنحدار الساكن والتي تكتب على الشكل:

$$Y_t = X_t' \beta + u_t \dots (8.1)$$

حيث أن Y_t مستقلة لأنها تعتمد على حد الأخطاء u_t والتي تكون بدورها مستقلة كما لاحظنا ذلك بالفصول الثالث، الرابع و الخامس. وهناك نماذج توزيع التأخير (بالفصل السابع) وهي على الشكل:

$$Y_t = \sum_{i=0}^s \beta_i' X_{t-i} + u_t \dots (8.2)$$

حيث أن X_{t-i} تؤثر على Y_t عبر مرحلة طويلة من توزيع التأخير وتبقى Y_t مستقلة ثم تطرقنا للنموذج الديناميكي (الحركي) على الشكل:

$$Y_t = \sum_{i=0}^p \alpha_i Y_{t-i} + X_t' \beta + u_t \dots (8.3)$$

حيث أن Y_{t-i} هي متغير تابع التأخير وتكون لـ Y_t خاصية متغير القرار. لأن القرارات الماضية تؤثر على القرارات الحالية، أي أن Y_{t-i} تؤثر تدريجيا وبدرجات متفاوتة على Y_t . لنستنتج أن Y_t هي سلسلة متغيرات عشوائية تابعة.

إذا كانت الأخطاء u_t بالمعادلة (3.8) تتبع نظام الإنحدار الذاتي من المرتبة P ، (أي $AR(P)$)، فإننا نقول عن تلك المعادلة بأنها تمثل نموذج إنحدار ذاتي للمتغيرات التابعة مع وجود المتغيرات المفسرة X وعنصر الأخطاء u_t . ونكتب الصيغة $ARARX$. أما إذا كانت u_t تتبع نظام المتوسط المتحرك من

المرتبة q (أي $MA(q)$)، فإن المعادلة (3.8) سوف تمثل نموذج إنحدار ذاتي للمتغيرات التابعة Y_t مع تصرف حد الأخطاء وكأنه مرجحات للمتوسط المتحرك وبوجود المتغيرات المفسرة المستقلة X ونكتب $ARMAX$.

يكون هدفنا، في هذا الفصل، هو تطوير نماذج تشرح تحرك السلسلة الزمنية، مثلا Y_t . هذه الأخيرة نشرحها بواسطة قيمها الماضية ومجموع مرجحات الأخطاء العشوائية الحالية والماضية (المؤخرة). نبدأ تحليلنا ببناء نماذج مبسطة للسلاسل الزمنية من نوع المتوسط المتحرك $Moving Average (MA)$ ، ونماذج الإنحدار الذاتي $Autoregressive (AR)$ بالنسبة للسيرورات المستقرة $Stationary processes$. فمثلا، في نموذج المتوسط المتحرك تكون السيرورة Y_t موضحة تماما بواسطة مجموع المرجحات للأخطاء العشوائية الحالية والمؤخرة. أما في نموذج الإنحدار الذاتي، فتعتمد السلسلة الزمنية Y_t على مجموع المرجحات لقيمها الماضية وحد الأخطاء العشوائية. ثم تدخل النماذج المختلطة النوعين المذكورين والتي تسمى بنماذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك $Autoregressive-Moving Average Models (ARMA)$. حيث تكون Y_t في نماذج $(ARMA)$ عبارة عن دالة لكل من الأخطاء العشوائية الحالية والماضية.

إذا كانت السيرورة الأصلية غير مستقرة، فمن الممكن استعمال طريقة الفروق مرة أو أكثر للحصول على سلسلة جديدة تكون مستقرة. حيث نستعمل هذا النموذج ذو السيرورة المستقرة لهدف التنبؤ بفترة أو أكثر في المستقبل، وسوف نتطرق بالتفصيل لهذا الموضوع فيما بعد.

8-1 نماذج المتوسط المتحرك Moving Average Models

تكون ملاحظة السلسلة الزمنية Y_t ، في سيرة المتوسط المتحرك ذو المرتبة $q \geq 1$ معمة بواسطة متوسط مرجح للأخطاء العشوائية التي نرسم لها بـ $MA(q)$ ونكتب معادلتها على الشكل:

$$Y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \dots (8.4)$$

حيث أن المعالم $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ يمكن أن تكون موجبة أو سالبة. نفرض الأخطاء معمة بواسطة سيرة الإضطراب الأبيض White Noise. وكحالة خاصة هذه الأخطاء لها التوزيع الطبيعي، مستقلة ومتماثلة التوزيع. إذا كانت $E(\varepsilon_t) = 0$ ، $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ ، $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0$ من أجل $k \neq 0$ ، فإن وسط السيرة $MA(q)$ يكون مستقلا عن الزمن t مادام $E(Y_t) = \delta$ ، ليصبح التباين المشترك لهذه السيرة:

$$E(Y_t Y_{t-k}) = E\left[Y_{t-k} (\delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})\right]$$

$$\gamma_k = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0 \quad : \quad k \neq 0$$

لتكون السيرة $MA(q)$ موضحة تماما بواسطة $(q+2)$ معالم. وهي الوسط δ . تباين الأخطاء σ_ε^2 ، وموجه المعالم $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ والمحددة لمرجحات سيرة المتوسط المتحرك.

أما التباين، الممثل بواسطة γ_0 ، لسيرة المتوسط المتحرك ($k=0$)، ذو المرتبة q فهو على الشكل:

$$\begin{aligned} \text{var}(Y_t) &= \gamma_0 = E[(Y_t - \delta)^2] \\ &= E[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \theta_q^2 \varepsilon_{t-q}^2 - 2\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - \dots] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \dots + \theta_q^2 \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 [1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2] \end{aligned}$$

وبالتالي يمكن كتابة التباين على النحو التالي:

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \left[1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2 \right] \dots (8.5)$$

إن المعادلة (5.8) تفرض قيودا على القيم التي تأخذها المعالم θ_j . ونتوقع بأن يكون تباين Y_t منتهي finite. مادام أن السلسلة العشوائية سوف تحتوي على إنحرافات أوسع عن نقطة المرجع المثبتة كلما ارتفع عامل الزمن. وهذا يؤثر. بدوره. على فرضية الإستقرار التي تتطلب الشرط:

$$\sum_{j=1}^q \theta_j^2 < \infty$$

في الإتجاه الذي يجعل النتيجة مبثالة. مادام لدينا عدد منتهي للمعالم θ_j . وبالتالي فإن مجموعها يكون منتهي. بينما يتطلب النموذج الكامل لأغلب السلاسل العشوائية عددا غير منتهي من حدود الأخطاء المؤخرة. ومن ثم، كلما ترتفع مرتبة السلسلة $MA(q)$. تصبح q كبيرة بدرجة غير منتهية، لذا يجب أن يكون المقدار

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2$$
 متقاربا. ويحدث التقارب إذا كلما ارتفعت j يتبعها إنخفاض في قيمة θ_j

المناسبة لها. ومنه إذا مثلنا سلسلة مستقرة بواسطة $MA(q)$. نتوقع أن تصبح قيمة المعالم θ_j أصغر كلما توسعت j . وسوف نرى. فيما بعد بأنه إذا كانت السلسلة $MA(q)$ مستقرة. فإن دالة ارتباطها p_k سوف تصبح أصغر كلما ارتفع k . حيث أن إحدى مؤشرات الإستقرار هي إقتراب دالة الارتباط الذاتي p_k من الصفر. وكمثال نأخذ سلسلة المتوسط المتحرك من المرتبة الأولى $MA(1)$.

$$Y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots (8.6)$$

إن هذه السلسلة لها وسط هو δ وتباين $\text{var}(Y_t) = \gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)$ أما التباين المشترك فيكون على الشكل:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \text{cov}(Y_t, Y_{t-1}) = E[(Y_t - \delta)(Y_{t-1} - \delta)] \\ &= E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})] \\ &= -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \dots (8.7) \end{aligned}$$

وعلى العموم نحدد التباين المشترك لـ k فترة تأخير على الشكل:

$$\gamma_k = E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})] = 0: k > 1 \dots (8.8)$$

ومنه فإن السيرورة $MA(1)$ لها تباين مشترك معدوم لما يكون التأخير أكبر من فترة واحدة. أي أن كل قيمة للسلسلة الزمنية Y_t تكون مرتبطة مع Y_{t-1} و Y_{t+1} دون قيم السلسلة الزمنية الماضية والمستقبلية الأخرى. وهذا يعني أن الحوادث الظاهرة في أكثر من فترة زمنية واحدة، في الماضي، ليس لها أثر على السيرورة حالياً. كما أن الذاكرة المحدودة لسيرورة المتوسط المتحرك توفر معلومة محدودة من أجل التنبؤ بنموذج المتوسط المتحرك في المستقبل. تكون هذه المعلومات مساوية لعدد فترات التأخير q . وفي مثالنا، $MA(1)$ ، تكون فترة واحدة في المستقبل فقط.

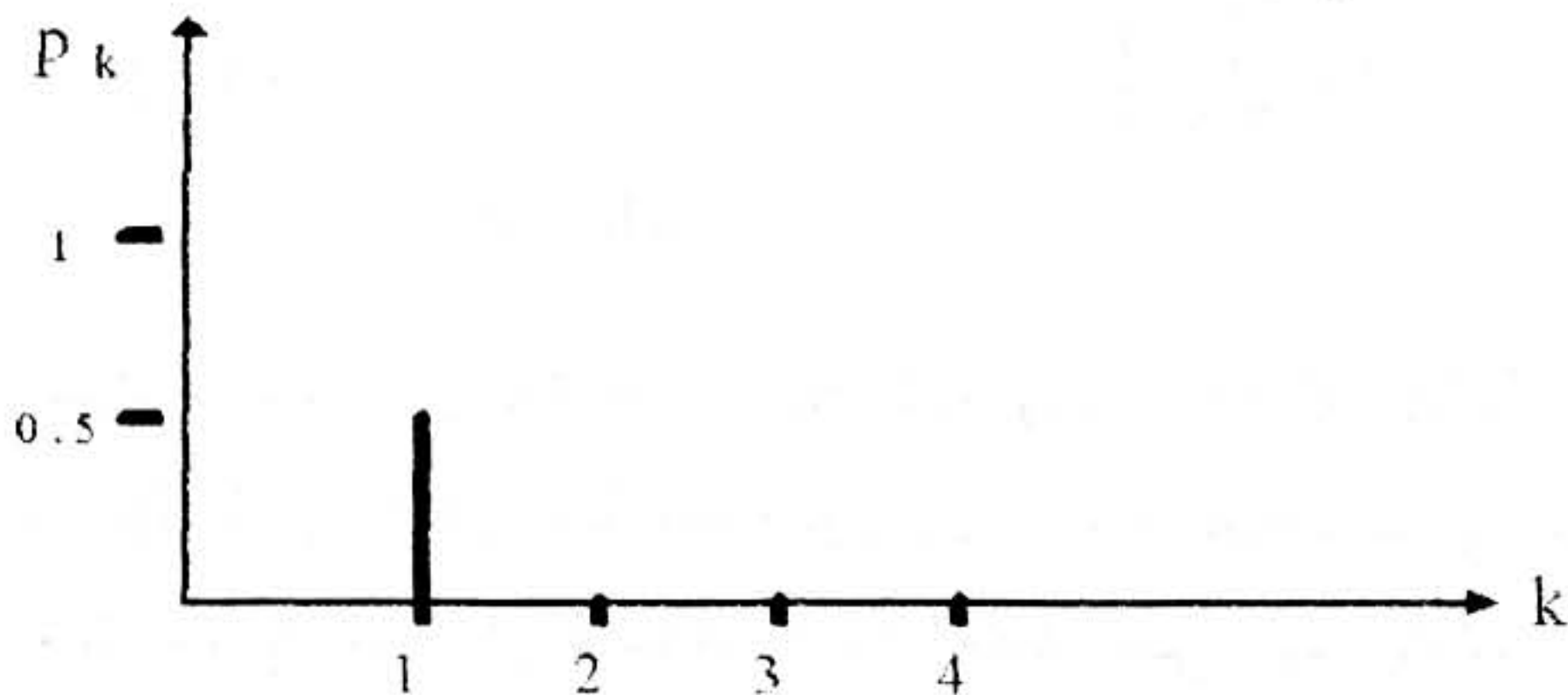
ومنه نقول أن دالة الارتباط الذاتي للسيرورة $MA(1)$ هي:

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0 = \begin{cases} -\theta_1 / (1 + \theta_1^2) : k = 1 \\ 0 : k > 1 \dots (8.9) \end{cases}$$

وإذا أخذنا دالة الارتباط الذاتي العينية $\text{Sample Autocorrelation function}$ للسيرورة $MA(1)$ على أنها:

$$Y_t = 1.2 + \varepsilon_t + 0.4\varepsilon_{t-1}$$

ينتج لدينا الشكل البياني (1.8) أدناه:



شكل (1.8) دالة الارتباط الذاتي العينية

أما إذا أخذنا السيرورة MA(2) على الشكل:

$$Y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \dots (8.10)$$

فإن هذه الأخيرة لها وسط هو δ وتباين $\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$ أما التباينات المشتركة فهي:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\theta_1(1 - \theta_2)\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_2 &= -\theta_2\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_k &= 0: k > 2 \end{aligned} \dots (8.11)$$

تسمى المعادلات (11.8) بالتباينات المشتركة الذاتية. أما دالة الارتباط الذاتي لنموذج السيرورة MA(2) فهي معطاة بـ:

$$p_k = \begin{cases} -\theta_1(1 - \theta_2)/(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) & : k = 1 \\ -\theta_2/(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) & : k = 2 \dots (8.12) \\ 0 & : k > 2 \end{cases}$$

إن السيرورة MA(2) لها ذاكرة بفترتين، وبالتالي فإن Y_t تتأثر فقط بالأحداث التي تأخذ مكانا في الفترة الحالية، الماضية والفترتين الماضيتين. أما السيرورة MA(q) فتكون لها ذاكرة بـ q فترة ماضية، ودالة ارتباطها p_k هي:

$$p_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k-1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2} : k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & : k > q \end{cases} \dots (8.13)$$

حيث أن دالة الارتباط الذاتي p_k للسيرورة MA(q) لها q قيمة تختلف عن الصفر، وتساوي الصفر فقط لما يكون $k > q$. وسوف نرى، عند مناقشتنا لمشكلة تمييز نماذج السلاسل الزمنية، لماذا نعتمد على دالة الارتباط الذاتي عند تخصيص مرتبة السيرورة MA(q).

2-8 نماذج الإنحدار الذاتي Autoregressive Models

تكون الملاحظة الحالية Y_t معمة بواسطة متوسط الترجيح للملاحظات الماضية إلى فترة التأخير من المرتبة P . مع الأخذ بعين الاعتبار حد الخطأ العشوائي في الفترة الحالية، ونسمي ذلك بنموذج الارتباط الذاتي للسلسلة الزمنية Y_t ذو المرتبة P ، $AR(P)$ أي:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t \dots (8.14)$$

إذا كانت السلسلة $AR(P)$ أعلاه مستقرة، فإن وسطها الممثل بـ μ ، يجب أن يكون غير متغير بالنسبة للزمن أي:

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = \dots = E(Y_{t-p}) = \mu$$

لينتج لدينا:

$$E(Y_t) = \phi_1 E(Y_{t-1}) + \phi_2 E(Y_{t-2}) + \dots + \phi_p E(Y_{t-p}) + \delta + E(\varepsilon_t)$$

$$\mu = \phi_1 \mu + \phi_2 \mu + \dots + \phi_p \mu + \delta$$

$$\mu = \delta / \left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \right) \dots (8.15)$$

إن العبارة (8.15) والخاصة بوسط السلسلة $AR(P)$ تعطي لنا أيضا شرط الاستقرار. فإذا كان μ منتهيا فمن الضروري أن تكون:

$$\sum_{j=1}^p \phi_j < 1 \dots (8.16)$$

إن شرط العبارة (8.16) ضروري، لكنه غير كافي لضمان حالة الاستقرار حيث هناك شروط أخرى يجب أن تتحقق من أجل أن يكون $AR(P)$ مستقرا. وسوف نأتي إلى ذكرها في الفقرات اللاحقة.

لنعتبر الآن خصائص السلاسل $AR(P)$ البسيطة بواسطة تحديد وسطها. تباينها وتبايناتها المشتركة. ولنبدأ بالسلسلة $AR(1)$ على الشكل:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \dots (8.17)$$

إذا كانت $E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = \mu$ ، فإن وسط هذه السلسلة هو:

$$\mu = \delta / [1 - \phi_1] \dots (8.17)'$$

تكون السلسلة $AR(1)$ أعلاه، مستقرة إذا تحقق $|\phi_1| < 1$. ونحسب

الآن تبين هذه السلسلة γ_0 حول وسطها μ . إذا وضعنا $\delta = 0$ مع وجود الشرط $|\phi_1| < 1$ يكون التباين ثابتا أي:

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \text{var}(Y_t) &= E[\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t]^2 \\ &= \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

وبالترتيب نجد:

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \phi_1^2) \dots (8.18)$$

أما التباينات المشتركة لـ Y_t حول وسطها فهي:

$$\gamma_1 = E(Y_t Y_{t-1}) = \phi_1 \gamma_0$$

$$\gamma_2 = E(Y_t Y_{t-2}) = \phi_1^2 \gamma_0 \dots (8.19)$$

$$\gamma_k = E(Y_t Y_{t-k}) = \phi_1^k \gamma_0 : k = 1, 2, \dots$$

لتكون دالة الارتباط الذاتي للسلسلة $AR(1)$ بسيطة وتنخفض هندسيا على الشكل:

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0 = \begin{cases} 1 & : k = 0 \\ \phi_1^k & : k = 1, 2, \dots \end{cases} \dots (8.20)$$

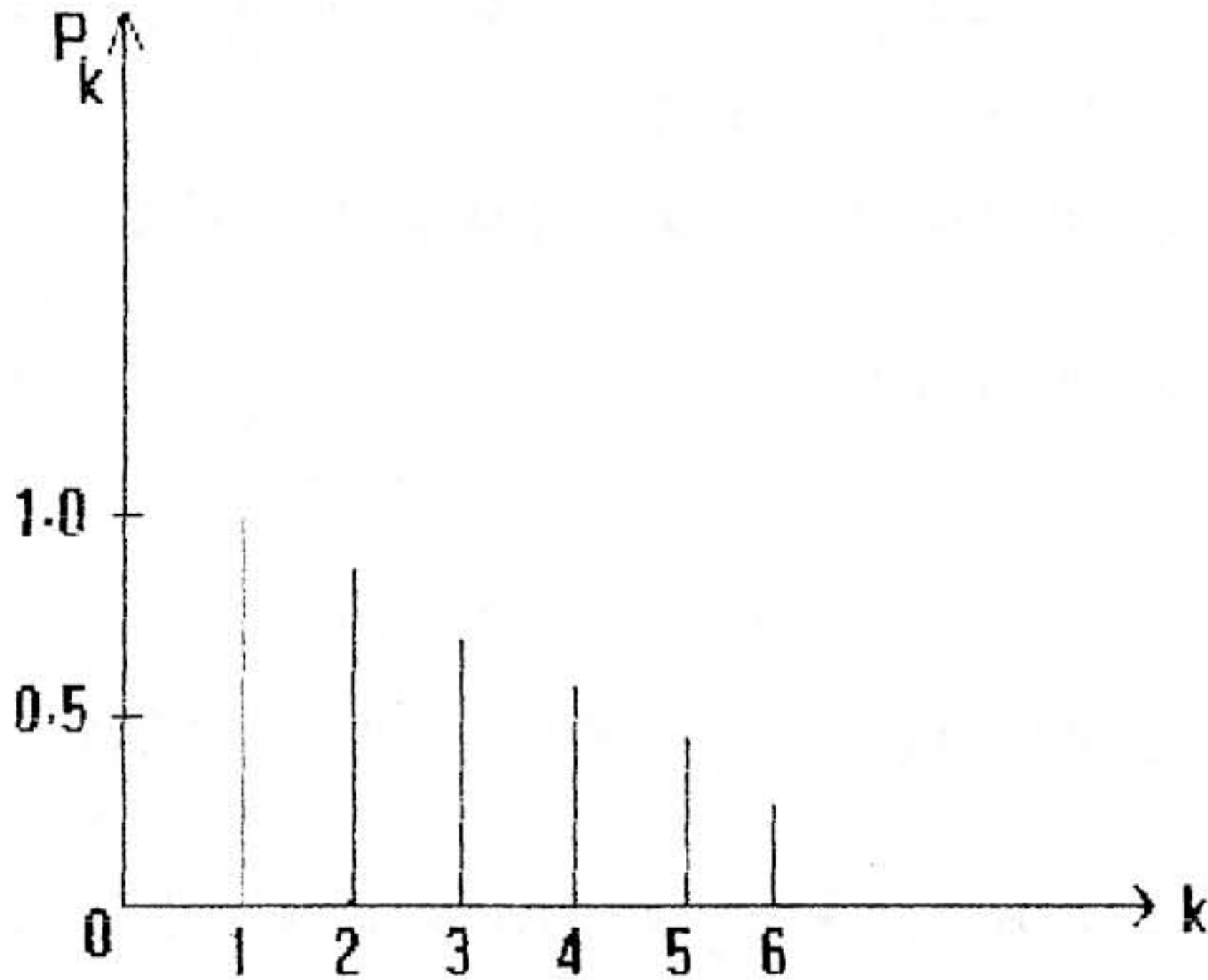
حيث نلاحظ أن السلسلة $AR(1)$ لها ذاكرة غير منتهية، وذلك لإعتماد القيمة الحالية للسلسلة على كل القيم الماضية، بالرغم من أن تصرف هذه التبعية ينخفض مع الزمن. ولنأخذ المثال التالي لتوضيح دالة الارتباط الذاتي للسلسلة $AR(1)$:

$$Y_t = 1.2 + 0.9Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

إن دالة الارتباط الذاتي للسلسلة $AR(1)$ أعلاه هي:

$$P_k = \begin{cases} 1: k = 0 \\ (0.9)^k: k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ونبينها بالشكل (2.8) أدناه:



الشكل (2.8) دالة الارتبط الذاتي AR(1).

أما إذا أخذنا السيرورة AR(2) على الشكل:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \delta + \varepsilon_t \dots (8.21)$$

وبتوفير الشرط الضروري للاستقرار $\phi_1 + \phi_2 < 1$ يكون وسط هذه السيرورة:

$$\mu = \delta / [1 - \phi_1 - \phi_2]$$

ولنأخذ Y_t في شكل إنحرافات عن وسطها، فتكون التباينات والتباينات المشتركة لـ Y_t هي:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \dots (8.22)$$

$$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0$$

لما $k \geq 2$ يكون:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \dots \dots (8.22)'$$

نحل جملة المعادلات (22.8) أنيا لنحصل على γ_0 بدلالة المعلمتين ϕ_1 ، ϕ_2 و σ_ϵ^2 . حيث نستطيع كتابة المعادلة الثانية لـ (22.8) على الشكل:

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 / (1 - \phi_2) \dots \dots (8.23)$$

وبتعويض المعادلة الثالثة في الأولى لجملة المعادلات (22.8) نجد:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \phi_1 \gamma_1 + \phi_2^2 \gamma_0 + \sigma_\epsilon^2$$

ثم نستعمل (23.8) لحذف γ_1 فنجد:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi_1^2 \gamma_0 / (1 - \phi_2) + \phi_2 \phi_1^2 \gamma_0 / (1 - \phi_2) + \phi_2^2 \gamma_0 + \sigma_\epsilon^2 \\ &= (1 - \phi_2) \sigma_\epsilon^2 / \left[(1 + \phi_2) \left((1 - \phi_2^2) - \phi_1^2 \right) \right] \dots \dots (8.24) \end{aligned}$$

ومنه يمكن استعمال هذه المعادلات للحصول على دالة الارتباط الذاتي p_k . حيث من المعادلة الثالثة لـ (22.8) والمعادلة (23.8) نجد:

$$p_k = \begin{cases} \phi_1 / (1 - \phi_2) : k = 1 \\ \phi_2 + \phi_1^2 / (1 - \phi_2) : k = 2 \dots \dots (8.25) \\ \phi_1 p_{k-1} + \phi_2 p_{k-2} : k \geq 2 \end{cases}$$

تسمى المعادلات (25.8) بمعادلات Yule Walker . ومنه نقول . من أجل دالة الارتباط الذاتي العينية للسلسلة الزمنية Y_t . والمعممة بواسطة السيرورة AR(2) ، نستطيع أخذ قياس لـ p_1 و p_2 ثم تعويضهما في المعادلات (25.8) لنحصل على معادلتين جبريتين واللتان نحلها أنيا من أجل المعلمتين غير المعروفتين ϕ_1 و ϕ_2 . وبالتالي يمكن استعمال معادلات (Y-W) للحصول على مقدرات معالم الإنحدار الذاتي ϕ_1 و ϕ_2 .

3-8 نماذج السيرورات المختلطة $ARMA(p,q)$ Mixed Process Models

هناك سيرورات عشوائية لا يمكن نمذجتها على أنها مجرد متوسط متحرك أو إنحدار ذاتي فقط، وذلك لإحتوائها على خصائص التوعين من السيرورات معا. ومنه يكون التوسع والدمج الحتمي والمنطقي للنوعين المتحدث عنهما أعلاه. هو سيرورة الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك المختلطة من المرتبتين p و q على الترتيب، ونكتبها على الشكل $ARMA(p,q)$ أي أن:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \dots (8.26)$$

ونفترض أن السيرورة $ARMA(p,q)$ مستقرة، بحيث أن وسطها يكون ثابتا عبر الزمن وتعطي النتيجة:

$$\mu = \delta / \left[1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \right]$$

كما أن الشرط الضروري لإستقرار $ARMA(p,q)$ هو $\sum_{j=1}^p \phi_j < 1$

ولنعتبر أبسط حالة وهي $ARMA(1,1)$ على الشكل:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots (8.27)$$

إذا أضفنا $\delta = 0$ ، تكون التباينات والتباينات المشتركة لهذه الأخيرة كمايلي:

$$\gamma_0 = E[Y_t(\phi_1 Y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})] = \text{var}(Y_t)$$

$$= E[\phi_1 Y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}]^2$$

$$= \phi_1^2 \gamma_0 - 2\phi_1 \theta_1 E(Y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2$$

وما دام $E(Y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2$ فإن:

$$\gamma_0 (1 - \phi_1^2) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1)$$

ثم من أجل $|\phi_1| < 1$ ينتج:

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 [1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1] / (1 - \phi_1^2) \dots (8.28)$$

أما التباينات المشتركة فهي:

$$\gamma_1 = E(Y_t Y_{t-1}) = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_e^2$$

$$\gamma_2 = E(Y_t Y_{t-2}) = \phi_1 \gamma_1 \quad \dots\dots(8.29)$$

$$\gamma_k = E(Y_t Y_{t-k}) = \phi_1 \gamma_{k-1} : k \geq 2$$

لتصبح دالة الارتباط الذاتي للسيرورة ARMA(1,1) على النحو:

$$p_k = \begin{cases} (1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1) / [1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1] : k = 1 \\ \phi_1 p_{k-1} : k \geq 2 \end{cases} \quad \dots\dots(8.30)$$

وهذا يعني أنه بمجرد الحصول على حل لـ γ_1 و p_1 ، يمكن تحديد البقية γ_k أو p_k ($k \geq 2$) بالتراجع. والنتيجة المستخلصة من التحليل أعلاه، هي أن السيرورة ARMA(1,1) لها دالة ارتباط ذاتي تبدأ عند نقطة إنطلاقها p_1 لكون السيرورة ARMA(1,1) لها دالة ارتباط ذاتي تبدأ عند نقطة إنطلاقها p_1 لكون السيرورة MA(1) لها ذاكرة بفترة واحدة فقط. ثم تنخفض هندسيا من هذه القيمة. أي أن دالة الارتباط الذاتي للسيرورة ARMA(1,1) تشبه في الشكل مثيلتها المحصلة من السيرورة AR(1). وعلى الرغم من أن قيم p_1 تكون مختلفة لدى السيرورتين، فإن العلاقة ما بين p_1 والقيم اللاحقة تكون مثل تلك الموجودة بالسيرورة AR(1). كما أن دالة الارتباط الذاتي للسيرورة ARMA(p,q) من أجل تأخيرات بفترة مساوية لـ q^* ($q^* > q$) تصبح لها شكل دالة الارتباط الذاتي للسيرورة AR(p) عند تلك الفترة المذكورة (q^*). حيث من أجل السيرورة ARMA(p,q)، يمكن أن نبين بأن:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} : k \geq q+1$$

$$p_k = \phi_1 p_{k-1} + \phi_2 p_{k-2} + \dots + \phi_p p_{k-p} : k \geq q+1$$

ونلاحظ أن q هو ذاكرة الجزء MA(q)، وبالتالي من أجل $k \geq q+1$ تأخذ دالة الارتباط الذاتي للسيرورة ARMA(p,q) خصائص السيرورة AR(p) فقط.

4-8 الإستقرار والتجانس Stationarity and Homogeneity

نقول عن سيرورة عشوائية ما، بأنها ذات معنى واسع للإستقرار Wide sense stationarity أو ذات تباين مشترك مستقر إذا كانت أوساطها، تبايناتها وتبايناتها المشتركة ثابتة عبر الزمن، أي أن:

$$\left. \begin{aligned} E(Y_t) &= E(Y_{t+k}) = \mu \\ \text{var}(Y_t) &= \text{var}(Y_{t+k}) = \gamma_0 \\ \text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) &= \text{cov}(Y_{t+k}, Y_{t+k+s}) \end{aligned} \right\} \dots (8.31)$$

وذلك من أجل t, k, s . إن فرضية المعنى الواسع للإستقرار أنه من أجل كل t, k فإن:

$$\gamma_{kt} = \gamma_k = \gamma_{-k} \quad : \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

وكذلك:

$$\rho_k = \rho_{-k} = \begin{cases} 1: & k = 0 \\ \gamma_k / \gamma_0 : & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

وهناك أداة مهمة في تحليل السلاسل الزمنية هي دالة الارتباط الذاتي النظرية. حيث أن دالة الارتباط الذاتي تختلف باختلاف النماذج وتساعد على تمثيل السلاسل الزمنية ميدانيا على النماذج. وأبسط مثال على ذلك هو لما تكون Y_t سيرورة عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع أي:

$$Y_t = \varepsilon_t$$

مع الفرضية:

$$\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad t = 1, 2, \dots, n$$

لكي تكون Y_t مستقرة، يجب أن تكون أوساطها، تبايناتها وتبايناتها المشتركة ثابتة عبر الزمن. ولنأخذ مثالا عن التحرك العشوائي Random Walk:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

إن هذه السيرورة تتناسب مع النموذج $AR(1)$ مع معلمة Y_{t-1} هي $\phi_1 = 1$. وبدلالة رموز الفصل السابع، نكتب السيرورة أعلاه على الشكل:

$$(1 - \phi_1 L)Y_t = \varepsilon_t; \phi_1 = 1$$

ليكون لها جذر أحادي Unit root، وهذا يعني عدم الإستقرار. ونستطيع التأكد من ذلك عن طريق إيجاد التباين والتباينات المشتركة للسلسلة. حيث إذا كان أحد العزوم غير ثابت، تكون السيرورة غير مستقرة. وبأخذ التوقع نجد:

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) = E(Y_{t-1})$$

ويعني ذلك أن هذه السيرورة مستقرة بالنسبة للوسط. أما بالنسبة للتباين فنجد:

$$\text{var}(Y_t) = \text{var}(Y_{t-1}) + \text{var}(\varepsilon_t) + 2 \text{cov}(Y_{t-1}, \varepsilon_t)$$

ومع ε_t مستقلة ومتماثلة التوزيع يكون الحد الأخير للمعادلة أعلاه معدوماً، فنجد:

$$\text{var}(Y_t) = \text{var}(Y_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2$$

أي أن:

$$\text{var}(Y_t) \neq \text{var}(Y_{t-1})$$

ومنه فإن التحرك العشوائي غير مستقر بالنسبة للتباين. وهذا كافٍ لأن تكون السيرورة غير مستقرة. أما إذا أضفنا جداً ثابتاً للتحرك العشوائي فتكون السيرورة غير مستقرة بالنسبة للوسط كذلك. وبالرغم من أن التحرك العشوائي يكون غير مستقر، فإن الفروق الأولى لـ Y_t تعطي سيرورة مستقرة مادام:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t$$

حيث أن ε_t ذو اضطراب أبيض White Noise. وهذا يبين أنه من الممكن في بعض الحالات تخصيص نموذج نظري غير مستقر - ثم نعمم سيرورة مستقرة بواسطة الفروقات. ومع هذا فهناك عدة حالات يكون فيها تطبيق الفروقات Differencing على السيرورة غير المستقرة لا يعطي نموذجاً مستقراً. وتسمى هذه الحالات بالسيرورات غير المستقرة وغير المتجانسة. أما بالنسبة لنموذج التحرك العشوائي أعلاه فهو سيرورة غير مستقرة ولكن متجانسة بمرتبة واحدة.

إن تخصيص نموذج غير مستقر تبعا للفروق يمكن أن يؤدي بنا إلى عدة مشاكل مثل الحصول على سيروزة لا يمكن تفريقها من أجل الوصول إلى الإستقرار. ولهذا نفهم لماذا أن نمذجي السلاسل الزمنية يستعملون عدة طرق، بواسطة عمليات التفريق للسلسلة الميدانية، من أجل الحصول على سلسلة محولة تظهر بأنها مستقرة. ثم ينظرون إلى النموذج الذي يمكن أن يمثل تصرف السلسلة المستقرة. ومنه نواجه مشكل كيفية التعرف على سلسلة ميدانية هل هي مستقرة أم لا؟ وقبل التطرق لذلك، يجب توضيح العلاقة بين الطرق المشروحة هنا والأفكار الموجودة بالفصل السابع. حيث أن أول شيء نقوم به هو النظر إلى رسم بياني للبيانات الملاحظة. إذا لاحظنا، بوضوح، تصاعد (أو تنازل) في الإتجاه العام Trend للسلسلة، تكون الأوساط العينية Sample Means لمختلف العينات الجزئية مختلفة نظاميا. وهذا يعني عدم إمكانية تعميم الملاحظات على سيروزة مستقرة، والتي تستلزم نفس القيمة للوسط $E(Y_t)$ بالنسبة لكل t ، أي أن $E(Y_t)$ غير ثابت عبر الزمن. وإذا فشلنا في تحديد إستقرار السلسلة الميدانية من الرسم البياني، يمكن أن ننظر إلى دالة الارتباط الذاتي للعينة أو ما يسمى ببيان الارتباط Correlogram.

إن دالة الارتباط الذاتي العينية لـ k تأخير هي على الشكل:

$$\hat{p}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2} : t = 1, 2, \dots$$

وبالنسبة لسلسلة مستقرة، يجب أن تتخفف الارتباطات الذاتية للعينة بسرعة كلما ارتفع k . أما إذا كانت سلسلة الملاحظات غير مستقرة، فإن الخطوة القادمة هي محاولة تفريقها، لهدف الحصول على سلسلة محولة ومستقرة. وبإستعمال w_t كأنه سلسلة مفرقة، يكون لدينا:

$$w_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}, t = 2, 3, \dots, n. \dots (8.32)$$

بعد تفريق السلسلة، يمكن النظر إلى كل من الرسم البياني للسلسلة المفرقة ودالة الارتباط الذاتي العينية للسلسلة المفرقة لهدف التأكد من عدم وجود مشكل عدم الإستقرار. إذا بقيت w_t غير مستقرة نواصل التفريق على الشكل:

$$w_t = \Delta^2 Y_t, t = 3, 4, \dots, n$$

ومنه يمكن أن نطبق عامل التفريق d مرة لنحصل على السلسلة المشتقة:

$$w_t = \Delta^d Y_t, t = 1 + d, \dots, n \dots (8.33)$$

ولاحظنا من قبل بأن الشرط الضروري للسيرورة $ARMA(p, q)$ كي تكون مستقرة هو:

$$\sum_{j=1}^p \phi_j < 1$$

ونقدم الآن الشرط الضروري والكافي للإستقرار، وذلك بتعميمه على السيرورات غير المستقرة والمتجانسة. لنعود للنماذج المختلطة $ARMA(p, q)$ بالمعادلة (26.8) ونكتب:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) y_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t \dots (8.34)$$

أو على الشكل:

$$\phi(L) y_t = \theta(L) \varepsilon_t \dots (8.35)$$

حيث أن y_t هي إنحراف Y_t عن وسطها. وإذا كانت Y_t مستقرة فإن $\phi^{-1}(L)$ يجب أن تتقارب. ويتطلب ذلك أن جذور المعادلة المميزة $\phi(L) = 0$ تقع خارج دائرة الواحد outside unit circle. لتكون الحلول L_1, L_2, \dots, L_p للمعادلة $\phi(L) = 0$ كلها أكبر من الواحد في التصرف بالقيمة المطلقة. وإذا تحقق ذلك نكتب المعادلة (35.8) على الشكل:

$$y_t = \phi^{-1}(L) \cdot \theta(L) \cdot \varepsilon_t \dots (8.36)$$

ونقول عن y_t بأنها قابلة للعكس (لها معكوس) إذا استطعنا كتابة المعادلة (35.8) على الشكل:

$$\theta^{-1}(L)\phi(L)y_t = \varepsilon_t, \dots (8.37)$$

أي إذا استطعنا قلب السيرورة ARMA(p,q) إلى السيرورة AR(p) فقط. وإذا كانت Y_t قابلة للقلب، فإن $\theta^{-1}(L)$ يجب أن تتقارب بشرط أن تقع جذور المعادلة المميزة $\theta(L) = 0$ خارج دائرة الواحد. وكمثال نعتبر السيرورة MA(1) والتي تكون معادلتها المميزة هي:

$$1 - \theta_1 L = 0$$

ومنه فإن شرط وجود المقلوب هو $L = \frac{1}{|\theta_1|} > 1$ أو أن $|\phi_1| < 1$. أما من أجل MA(2) تكون المعادلة المميزة هي:

$$1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 = 0$$

$$L = \frac{-\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{2\theta_2}$$

إن القيميتين L_1 و L_2 ، يجب أن تقعا خارج دائرة الواحد، والتي تستلزم أن:

$$\theta_2 + \theta_1 < 1, \quad \theta_2 - \theta_1 < 1, \quad |\theta_2| < 1$$

وبالرجوع للمعادلة (33.8)، نقول أن Y_t هي سلسلة متجانسة وغير مستقرة من المرتبة d إذا تحققت $w_t = \Delta^d Y_t$ سلسلة جديدة مستقرة. ومنه نقول إذا كانت لدينا السلسلة المستقرة w_t يمكن الرجوع إلى السلسلة الأصلية Y_t بواسطة جمع السلسلة المحولة w_t d مرة ونكتبها:

$$Y_t = \sum \Delta^d w_t$$

ويمكن أن نكتب $\Delta = 1 - L$ وبالتالي

$$\Sigma = \Delta^{-1} = (1 - L)^{-1}$$

لينتج أن:

$$Y_t = (1 - L)^{-d} w_t$$

أو:

$$w_t = (1 - L)^d Y_t, \dots (8.38)$$

وبعد تفريق السلسلة Y_t للحصول على السلسلة المستقرة w_t ، يمكن أن نمذج w_t كأنها سيرورة $ARMA(p,q)$. أما إذا كانت $w_t = (1-L)^d Y_t$ ، هي السيرورة $ARMA(p,q)$ ، فإنه ينتج أن Y_t هي سيرورة $ARIMA(p,d,q)$. ونسمي ذلك بنموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك الكامل ونكتبها:

$$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \delta + \theta(L)\varepsilon_t \dots (8.39)$$

ونلاحظ أن وسط $w_t = (1-L)^d Y_t$ المستقر هو:

$$\mu_w = \delta / \left[1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \right]$$

وبالتالي إذا كانت $\delta = 0$ فإن السلسلة المكاملة w_t سوف يكون لها إتجاه عام محدد البناء.

5-8 دالة الارتباط الذاتي الجزئي Partial Autocorrelation Function

إن أحد المشاكل المعروفة في بناء نماذج الإنحدار الذاتي هي تمييز مرتبة السيرورة. فبالنسبة لنماذج المتوسط المتحرك يكون هذا المشكل ضعيفا (بسيطا)، حيث إذا كانت السيرورة من المرتبة q فإن عينة الارتباطات الذاتية يجب أن تكون كلها قريبة من الصفر من أجل تأخيرات أكبر من q . وبالرغم من أن بعض المعلومات حول مرتبة الإنحدار الذاتي يمكن الحصول عليها من التصرف الدوري لعينة دالة الارتباط الذاتي، فإن معلومات أكثر يمكن إستنتاجها من دالة الارتباط الذاتي الجزئية. ولمعرفة دالة الارتباط الذاتي الجزئية وكيفية إستعمالها، نعتبر أولا، التباينات المشتركة ودالة الارتباط الذاتي للسيرورة $AR(p)$. حيث نلاحظ أن التباين المشترك بتأخير k محدد من:

$$\gamma_k = E \left[Y_{t-k} (\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t) \right]$$

ولنترك الآن $k = 0, 1, 2, \dots, p$ لنحصل على $p+1$ معادلات فروق والتي يمكن حلها أنيا من أجل $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$.

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_e^2 \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_{p-1} \\ &\vdots \\ \gamma_p &= \phi_1 \gamma_{p-1} + \phi_2 \gamma_{p-2} + \dots + \phi_p \gamma_0 \end{aligned} \right\} \dots (8.40)$$

بالنسبة للتأخيرات $k > p$ تصبح لدينا:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} : k > p \dots (8.41)$$

وبتقسيم المعادلات (40.8) على التباين γ_0 نحصل على معادلات Yulle-Walker لدالة الارتباط الذاتي على النحو:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ &\vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{aligned} \right\} \dots (8.42)$$

ومن أجل تأخيرات $k > p$ ينتج لدينا من المعادلة (41.8):

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \dots (8.43)$$

إن المعادلات (42.8) هي معادلات (Y-w). وإذا كانت $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ معروفة (مقاسة من دالة الارتباط الذاتي للعينة). فإنه يمكن حل المعادلات (42.8) من أجل المعالم ϕ_j ، $j=1, 2, \dots, p$. ولكن، عمليا، يتطلب حل هذه الأخيرة معرفة مرتبة الإنحدار الذاتي P . وتحديد هذه المرتبة يعتبر صعبا. ولهذا نفترض أننا نحل معادلات (Y-w) من أجل القيم المتتالية لـ P . أي نبدأ بوضع الفرضية $P=1$. ومن ثم تصبح المعادلة (42.8) على أنها $\rho_1 = \phi_1$. أو نستعمل الارتباطات الذاتية العينية $\hat{\rho}_1 = \hat{\phi}_1$. ولهذا، إذا كانت القيمة المحسوبة $\hat{\phi}_1$ لها معنوية جيدة (مختلفة عن الصفر). نقول أن سيرورة الإنحدار الذاتي تكون على الأقل من المرتبة الأولى. ونمثل تلك القيمة (لـ $\hat{\phi}_1$) بواسطة a_1 . ثم نعتبر الفرضية $p=2$. أي $AR(2)$. وللقيام بذلك نحل معادلات (Y-w) بـ (42.8) من أجل $p=2$. إن القيام بذلك يعطي

مجموعة جديدة من المقدرات $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$. إذا كانت $\hat{\phi}_2$ لها معنوية إحصائية جيدة. يمكن الإستنتاج بأن السيرورة على الأقل هي من المرتبة الثانية. بينما إذا كانت $\hat{\phi}_2$ قريبة من الصفر. نقول أن $p=1$. لنمثل قيمة $\hat{\phi}_2$ بواسطة a_2 ، ونعيد الآن هذه الطريقة بالنسبة للقيم المتتالية لـ P . ثم نسمي هذه السلسلة بـ a_1, a_2, \dots بدالة الارتباط الذاتي الجزئية. وعلى العموم إذا كانت المرتبة الحقيقية للسيرورة هي P فإننا نلاحظ أن:

$$a_j = 0: j > p$$

6-8 بناء نماذج السلاسل الزمنية الخطية

من بين الكتب القيمة والبارزة في فترة السبعينات. يعتبر كتاب الباحثين Box-Jenkins (1970) مهما في تحليل نماذج السلاسل الزمنية. حيث يهتم بجمع بعض التقنيات المستعملة للمساعدة على تخصيص مراتب النموذج وتقدير معالمه. ثم إقتراح بعض الطرق للتأكد من صلاحية النموذج لأخذ شكله النهائي.

رأينا أن السلسلة الزمنية غير المستقرة والمتجانسة يمكن أن تنمذج على شكل $ARIMA(p,d,q)$. ويكون الشكل التطبيقي هو كيفية إختيار القيم الثلاثة (p,d,q) . ولتخصيص شكل هذا النوع من النماذج. نختبر كلا من دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي الجزئية من أجل السلسلة الزمنية المعنية بالدراسة. فبمعرفة السلسلة الزمنية لـ Y_t والمطلوب نمذجتها يكون الشكل هو تحديد درجة التجانس. d . أو عدد الفترات التي نفرق بها السلسلة من أجل الحصول على السلسلة المستقرة. ومنه نقول. لتحديد القيمة العددية المناسبة لـ d . نستعمل الفكرة القائلة بأن الارتباط الذاتي p_r . بالنسبة للسلاسل الزمنية المستقرة. يجب أن تقترب تدريجيا من الصفر كلما كبر عدد التأخيرات k . ولمعرفة ذلك نعتبر نموذج السيرورة $ARMA(p,q)$. حيث أن دالة الارتباط الذاتي للجزء $MA(q)$ يصبح صفرا عند $k > p$. لأن هذا النمط له ذاكرة تساوي q فترة فقط. ومنه إذا كانت Y_t تتبع السيرورة $MA(q)$. فإن $p_k = 0$ من أجل $k > p$ ونعرف كذلك بأن دالة الارتباط

الذاتي للجزء $AR(p)$ من السيرورة $ARMA(p,q)$ المستقرة هي ذات خاصية رطبة هندسيا. وأخيرا إن دالة الارتباط الذاتي للسيرورة الكاملة $ARMA(p,q)$ لها متوسط متحرك مميز من أجل الفترات $q-p$ الأولى، لكن بعد ذلك تكون منحدره ذاتيا في التصرف وتأخذ خصائص $AR(p)$.

إن طريقة تخصيص قيمة d هي مباشرة، حيث ننظر إلى دالة الارتباط الذاتي للسلسلة الأصلية Y_t ونحدد ما إذا كانت مستقرة أو لا. فإذا حدث وإن كانت غير مستقرة نلجأ إلى استعمال تقنية الفروق على السلسلة لكي نحدد الاستقرار. ونعيد هذه الطريقة حتى نصل إلى القيمة d التي تجعل السلسلة مستقرة أي $w_t = (1-L)^d Y_t$ وهذا معناه أن دالة الارتباط الذاتي p_k تذهب للصفر لما تصبح k كبيرة.

بعد تحديد قيمة d ، يمكن استعمال السلسلة المستقرة $w_t = (1-L)^d Y_t$ لإختبار كل من دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي الجزئية لتحديد تخصيص الأتبع p, q . وإذا كان كل من الجزء MA و AR لهما مراتب عليا، يمكن استعمال التجريب لكل من p و q . ثم نتأكد من ذلك التجريب بعد تقدير معالم النموذج $ARMA(p,q)$ للسلسلة المحولة (المفرقة). حيث مازال ليومنا هذا مشكل تخصيص هذا النوع من النماذج يخضع لمهارة التجريب، وبالتالي فإن عملية تخصيص هذه الأخيرة تعتبر فنا عوضا عن علم.

إن الحديث أعلاه، يقترح علينا النظر إلى السلسلة المفرقة w_t عوضا عن السلسلة الأصلية Y_t . ومنه نقول أن مجموعة النماذج الممكن تطبيقها على أية سلسلة مستقرة w_t تكون ممثلة بواسطة السيرورة $ARMA(p,q)$ على النحو:

$$w_t - \phi_1 w_{t-1} - \dots - \phi_p w_{t-p} = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \dots (8.44)$$

حيث يكون ε_t بالمعادلة (44.8) مستقلا ومتماثل التوزيع بوسط يساوي للصفر وتباين ثابت بالنسبة لكل t . ويمكن إعادة كتابة النموذج (44.8) على الشكل:

$$\phi(L)w_t = \delta + \theta(L)\varepsilon_t \dots (8.45)$$

حيث أن:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

كما أن الحدود الممثلة بواسطة $\phi(L)w_t$ هي الجزء $AR(p)$ من النموذج، أما الحدود الممثلة بواسطة $\theta(L)\varepsilon_t$ فهي الجزء $MA(q)$. كما نلاحظ في النموذج (45.8) أن تطبيقات النموذج غير مقيدة بفترة الزمن $t=1,2,\dots,n$ ومن المعقول أن نسمح للسيروية بأن تبدأ من فترة سابقة في الزمن وكذلك لفترة لاحقة من الزمن حتى يتسنى لنا استعمال النموذج لغرض التنبؤ. إن المعادلة (45.8) هي عبارة عن نموذج $ARMA(p,q)$ مطبق على السلسلة المحولة w_t . وإذا حصلنا على w_t من تفريق البيانات الأصلية d مرة، يكون النموذج بالنسبة للسلسلة الأصلية Y_t هو:

$$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \delta + \theta(L)\varepsilon_t \dots (8.46)$$

نسمي المعادلة (46.8) بنموذج $ARIMA(p,d,q)$ المطبق على Y_t وهو نموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك من المرتبتين p و q على الترتيب، والمكامل d مرة. إن كلمة المكامل هي توضيح للسلسلة الأصلية Y_t بالمقارنة مع السلسلة المفرقة. إذا فرقنا السلسلة الأصلية Y_t d مرة، من أجل الحصول على السلسلة المستقرة w_t ، نقول أن Y_t مكاملة (مفرقة) d مرة. حيث إذا أحتوت Y_t اتجاه عام Trend كثير الحدود من الدرجة d ، فإنه يمكن حذف هذا الأخير أو تحريكه بواسطة عامل التفريق $(1-L)^d$ Differencing operator حتى تحقق Y_t سيروية مستقرة من النوع $ARIMA(p,d,q)$.

إن إستراتيجية تكوين نماذج $ARIMA$ تعتمد على ثلاثة مراحل أساسية وهي:

- (i) مرحلة التمييز Identification
- (ii) مرحلة التقدير Estimation
- (iii) مرحلة ضبط (مراقبة) التشخيص Diagnostic Checking

ففي مرحلة التمييز، نختار نموذج خاص من المجموعة العامة للمعادلة (46.8) أي في هذه المرحلة نختار قيما مناسبة لـ p, d, q . إن الطريقة المستعملة في المرحلة الأولى تعتبر ضرورية وتتطلب حكما جيدا. ورغم ذلك، لسنا مقيدين بطريقة معينة. حيث إذا وجدنا صيغا أخرى تناسب النموذج المدروس، يكون من الضروري، في هذه المرحلة، الحصول على مقدرات إنطلاق إعتباطية (مختارة) للمعالم $\phi_i, \theta_j, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q$ للنموذج المميز.

أما في مرحلة التقدير للنموذج المخصص، تكون معالم النموذج المميز مقدرة بإستعمال تقنيات إحصائية كفؤة. ونحصل على الأخطاء المعيارية للمعالم المقدرة، ثم نجري إختبار الفرضيات وإشتقاق مجالات الثقة.

وفي الأخير، نطبق فكرة التأكد من التشخيص لتحديد ما إذا كان النموذج المختار يمثل مجموعة البيانات المدروسة أم لا. وإذا كان هناك عدم تناسب، نقترح تخصيص نموذج بديل. ومنه نعيد الدورة التكرارية لكل من مراحل التمييز، التقدير والتأكد من التشخيص، حتى نحصل على نموذج صحيح ويمثل مجموعة البيانات.

1-6-8 مرحلة التمييز

إن أصعب مرحلة في بناء نماذج السلاسل الزمنية هي مرحلة التمييز. حيث مايزال، ليومنا هذا، دور كبير للتجربة الميدانية في تحديد المراتب (p, d, q) للنماذج ARIMA. ويمكن للنموذج الأولي المختار أن يزاح (يرفض) في المرحلة النهائية من التحليل. كما يمكن الحصول على عدة بدائل للنماذج الممكنة في مرحلة التمييز. إذ بالإضافة إلى p و q ، يجب تحديد مرتبة التفريق d في مرحلة التمييز. ومنه نقول أن السلاسل الزمنية الموسمية، يتم تحليلها بواسطة إستعمال الفروقات الموسمية الإضافية مثل $(1 - L^s)^d$. فالسلسلة الشهرية $s=12$ بالنسبة للفروقات الموسمية مع $d=1$ مثلا هي $(1 - L^s)^d Y_t = Y_t - Y_{t-12}$.

إذا أظهرت السلسلة Y_t إتجاها عاما قويا، فإن التفريق مرة واحدة أو مرتين سوف ينتج غالبا السلسلة المستقرة w_t . ولتحديد مرتبة الارتباط الذاتي P ومرتبة المتوسط المتحرك q ، نستعمل دالة الارتباط الذاتي العينية Sample Autocorrelation function ودالة الارتباط الذاتي العينية الجزئية. إن مميزات هتين الدالتين هو أنهما يمكن أن يبينتا مرتبتين $ARMA(p,q)$ ومن ثم يمكن إختيار النموذج المناسب من أجل تقديره.

إذن، نستنتج أن الأداتين المستعملتين، غالبا، في أية عملية لتمييز النموذج هما دالتي الارتباط الذاتي العينية والارتباط الذاتي العينية الجزئية. فوجود السلسلة Y_t تكون دالة الارتباط الذاتي العينية (والتي هي رسم الارتباطات الذاتية) على الشكل:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}, k = 0, 1, 2, \dots$$

مقترحة مقدرا واضحا لدالة الارتباط الذاتي p_k . وتكون التباينات المشتركة الذاتية لأية سيروية تتصرف على الشكل:

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^p \phi_j \gamma_{k-j}; k > 0 \dots (8.47)$$

وبتقسيم هذه العبارة على التباين γ_0 ، ينتج لدينا الارتباطات الذاتية على النحو:

$$p_k = \sum_{j=1}^p \phi_j p_{k-j}; k > 0 \dots (8.48)$$

ويكون الارتباط الذاتي الجزئي، من المرتبة k لأية سيروية عشوائية، عبارة عن ϕ_{sj} ، ونحصل عليه بحل مجموعة المعادلات الخطية التالية في ϕ_{sj} :

$$p_k = \sum_{j=1}^s \phi_{sj} p_{k-j}; k = 1, 2, \dots, s \dots (8.49)$$

ونحل المعادلات (s) الأولى لهذا النظام من أجل ϕ_{sj} ، وتكون النتيجة a_{ss} ، على أنها إرتباط ذاتي جزئي. وينتج من المعادلة (48.8) أنه من أجل أية سيرورة للإتحدار الذاتي ذو المرتبة p تكون $\phi_{pp} = \phi_p$. كما أنه من أجل أية سيرورة للإرتباطات الذاتية الجزئية ذات المرتبة الأكبر من p تكون كلها مساوية للصفر. حيث من أجل أي عدد صحيح وموجب m يكون:

$$p_k = \sum_{j=1}^p \phi_j p_{k-j} : k = 1, 2, \dots, p, \dots, p+m$$

أي أن:

$$p_k = \sum_{j=1}^{p+m} \phi_j^* p_{k-j}$$

حيث أن:

$$\phi_j^* = \begin{cases} \phi_j : j = 1, 2, \dots, p \\ 0 : j = p+1, \dots, p+m \end{cases}$$

وبالتالي فإن حل المعادلات (49.8) من أجل $k > p$ تعطي إرتباطات ذاتية جزئية $\phi_j = 0$ ، $j = p+1, \dots, p+m$. إن المقدّر المعقول للإرتباطات الذاتية الجزئية ينتج من تعويض الإرتباطات الذاتية العينية r_k أو p_k ، وحل نتيجة تلك المعادلات. ومنه، فإن الإرتباط الذاتي الجزئي للعينة من المرتبة s هو $\hat{\phi}_{ss}$. ويعطي كحل لمجموعة المعادلات التالية:

$$r_k = \sum_{j=1}^s \hat{\phi}_{sj} r_{k-j} : k = 1, 2, \dots, s$$

إن الخطوة الأولى لتمييز الدالة (السيرورة) هي حساب الإرتباطات الذاتية العينية المدروسة والإرتباطات الذاتية الجزئية للسلسلة الزمنية المعطاة مع تفريقاتها الأولى أو الثانية. كما أن عدم الإضمحلال السريع للإرتباطات الذاتية العينية، عند التأخيرات العالية (الكبيرة)، وبقاء التصرف الخاص بالإتجاه العام يكون مؤشرا على وجوب إحداث تفريقات أخرى. وبعد الحصول على الإستقرار فإنه يمكن دراسة

الارتباطات الذاتية والارتباطات الذاتية الجزئية للعينة لتساعدنا على تمييز نوعية التصرف الخاص بالإنحدار الذاتي أو المتوسط المتحرك أو لكليهما معا. وعند تحديد الارتباطات الذاتية المساوية للصفر - بعد المرتبة q ، نقترح أداتين:

وتقترح الأداة الأولى بأن تكون الإنحرافات المعيارية للارتباطات الذاتية الجزئية للعينة، \hat{a}_{ss} ، تقاربيا مساوية للقيمة $n^{-1/2}$ من أجل $k > p$. حيث يرى Anderson (1942) أنه بوجود التوزيع الطبيعي للأخطاء في العينات الكبيرة، فإنه من أجل عينات ذات حجم n تكون مقارنة الكميات العينية مع المجال $0 \pm 2n^{-1/2}$ تعطي توجيهها جيدا للمعنوية الإحصائية.

أما الأداة الثانية في اختيار النموذج يقترحها Hamman-Rissanen (1982). حيث إذا كانت n ملاحظات متوفرة (مع n كبيرة بدرجة كافية) وتوصلنا إلى درجة معقولة من التفريق للسيرورة، فإن السلسلة المحولة (المفرقة) w_t ذات الوسط صفر والشكل:

$$\phi(L)w_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

نحاول، أولا، تفريقها بواسطة الإنحدار الذاتي من المرتبة s حيث s يجب تحديدها ولتكن على الشكل:

$$w_t = \phi_{s1}w_{t-1} + \phi_{s2}w_{t-2} + \dots + \phi_{ss}w_{t-s} + \varepsilon_t$$

وبوجود الارتباطات الذاتية العينية r ، فإن المعالم ϕ_{sj} يمكن تقديرها بالتراجع وفقا لطريقة Durbin (1960)، والتي تعطي (1)

$$\hat{\phi}_{11} = r_1, \quad \hat{\phi}_{ss} = \frac{r_s - \sum_{j=1}^{s-1} \hat{\phi}_{s-1,j} \cdot r_{s-j}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} \hat{\phi}_{s-1,j} \cdot r_j},$$

$$\hat{\phi}_{sj} = \hat{\phi}_{s-1,j} - \hat{\phi}_{s-1,s-j} : j = 1, 2, \dots, s-1$$

1- أنظر: C.W.J Granger and P. Newbold "Forecasting Economic Time series"

Academic press Inc London 1986, PP81-86

حيث أن $\hat{\phi}_{ss}$ هي الارتباطات الذاتية الجزئية العينية. ويكون تحديد القيمة المناسبة لـ s (المرتبة المقربة للانحدار الذاتي) عن طريق استعمال معيار المعلومات للباحث Akaike 1969 أي نختار قيمة s التي تحقق أصغر قيمة للعبارة التالية:

$$AIC = n \log \hat{\sigma}_s^2 + 2s$$

حيث أن AIC هي معيار المعلومات لـ Akaike، و s هو عدد المعالم. أما إذا استعملنا عدة عينات مختلفة الحجم بالنسبة لنفس السلسلة Y_t أو w_t ، فإننا نستعمل معيار المعلومات المرجح والذي يعطي أصغر قيمة للمقدار:

$$NAIC = \log \hat{\sigma}_s^2 + 2s/n$$

حيث أن $\hat{\sigma}_s^2$ هو مقدار تباينات الأخطاء من الانحدارات الذاتية المقدرة والتي يمكن إيجادها بالتراجع من:

$$\hat{\sigma}_1^2 = (1 - r_1^2) \sum_{t=1}^n \frac{w_t^2}{n}, \quad \hat{\sigma}_s^2 = (1 - \hat{\phi}_{ss}^2) \hat{\sigma}_{s-1}^2$$

إن الهدف من تقدير الانحدار الذاتي المقرب هو الحصول على مقدرات للمبتكرات ε_t . حيث إذا كانت القيمة المختارة لـ s هي s^* ، يمكن أن نستعمل لذلك البواقي على الشكل:

$$\hat{\varepsilon}_t = w_t - \hat{\phi}_{s,1} w_{t-1} - \hat{\phi}_{s,2} w_{t-2} - \dots - \hat{\phi}_{s,s} w_{t-s}$$

ويمكن استعمال هذه البواقي مكان المبتكرات المؤخرة ε_{t-1} في التشكيلة $ARMA(p,q)$ ومنه، تقاربيا، يمكن أن نكتب:

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + \theta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \dots + \theta_q \hat{\varepsilon}_{t-q} + \varepsilon_t \dots (8.50)$$

إن مزايا المعادلة (50.8) هو أنه يمكن تقدير المعالم ϕ_j ، θ_i ، $j=1, \dots, p$ ، $i=1, \dots, q$ نسبيا بواسطة المربعات الصغرى العادية. عمليا، نقدر (50.8) بواسطة المربعات الصغرى من أجل توفيقات القيم (p,q) . حيث أن

الباحثين (2) Hannan-Rissanen يقترحان القيم الخاصة بـ (p, q) بحيث أننا نختار أصغر قيمة للعبارة التالية:

$$\log \hat{\sigma}_{p,q}^2 + \frac{(p+q) \log n}{n}$$

ولقد أثبت جدية هذه الطريقة عدة باحثين (3) عبر تجارب مطبقة على مختلف العينات المطورة ويقترح (4) (1984) Hannan-Kavalier تحويلات مختلفة للطريقة الأصلية والتي تعطي مرتبة المقدرات المتسقة.

2-6-8 مرحلة التقدير

نعتبر الآن كيفية تقدير معالم النموذج ARIMA وذلك بعد تمييز القيم المناسبة لـ p, d, q . حيث نبدأ بتوضيح الطرق المحتوية على التقدير والتأكد من صلاحية نموذج السلسلة الزمنية. فلما نختار القيم المذكورة للنموذج ARIMA (مع وضع $\delta = 0$)، تكون السلسلة المحولة مقاسة في شكل إنحرافات عن أوساطها ونكتب:

$$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t, \dots (8.51)$$

أو على الشكل:

$$\phi(L)w_t = \theta(L)\varepsilon_t, \dots (8.52)$$

مع حد الأخطاء ε_t مستقل ومتماثل التوزيع بوسط مساوي للصفر وبتباين ثابت هو σ_ε^2 . وكذلك السلسلة المفرقة w_t هي:

$$w_t = (1-L)^d Y_t \quad t = d+1, d+2, \dots, n$$

²- Hannan.E.J and Rissanen "Recursive Estimation of ARIMA" Biometrika N°69, PP81-94, 1982.

³- Newbold P and Bas. T "On the use of the Hannan-Rissanen criterion in T.S.M selection" University of Illinois 1982.

⁴- Hannan.E.J and Kavalier.L "A Method for ARMA", Biometrika N°72, PP 273-280, 1984.

ويمكن الحصول على المقدرات من أجل P معالم الإتحاد الذاتي و q معالم المتوسط المتحرك. ونختار قيم المعالم التي تصغر مجموع مربعات الفروقات ما بين السلسلة الحالية $w_t = (1-L)^d Y_t$ والسلسلة المقدرة \hat{w}_t . وهذا يعني إعادة كتابة (52.8) بدلالة سلسلة حد الأخطاء ε_t على الشكل:

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(L)\phi(L)w_t \dots (8.53)$$

ويكون الهدف من عملية التقدير هو إيجاد موجه لمعالم الإتحاد الذاتي $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ وموجه لمعالم المتحرك المتوسط $\phi' = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ اللذين يصغران مجموع مربعات الأخطاء:

$$S(\phi, \theta) = \sum_{t=d+1}^n \varepsilon_t^2 \dots (8.54)$$

وإذا مثلنا موجهات المعالم التي تصغر (54.8) بواسطة $\hat{\phi}$ و $\hat{\theta}$ ، والبواقي المناسبة لها بواسطة $\hat{\varepsilon}_t$ تصبح (53.8) و (54.8) على الشكل:

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\theta}^{-1}(L)\hat{\phi}(L)w_t$$

$$S(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = \sum_{t=d+1}^n \hat{\varepsilon}_t^2$$

إذا كانت حدود المتوسط المتحرك موجودة يصبح تقدير هذه العبارة صعبا، حيث أن المعادلة (53.8) غير خطية في المعالم. ومنه، لتصغير المعادلة (54.8) يجب استعمال طرق التكرار للتقدير غير الخطي. كما أن حد الأخطاء الأولى ε_1 في السلسلة، يعتمد على القيم الماضية وغير الملاحظة $(w_0, w_{-1}, \dots, w_{-p+1})$ وكذلك على $(\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-q+1})$. وبالتالي يجب استعمال طرق معينة لإنطلاق السلسلة عند القيم غير الملاحظة قبل تطبيق طريقة التقدير غير الخطي.

ونفرض أنه لدينا $n+d$ ملاحظات متوفرة في السلسلة الزمنية غير المستقرة والمتجانسة Y_t ذات المرتبة d . ثم نمثل هذه الملاحظات على أنها $Y_{-d+1}, Y_{-d+2}, \dots, Y_0, Y_1, \dots, Y_n$. فبعد تفريق هذه السلسلة d مرة، نحصل على السلسلة المستقرة w_t مع n ملاحظات، وهي w_1, \dots, w_n . يكون الشكل

هنا هو تقدير مجهولي المعالم ϕ و θ للنموذج $ARMA(p,q)$ الذي خصصناه للسلسلة المفرقة w_t . نفترض أن حدود الأخطاء $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ كلها موزعة طبيعيا ومستقلة بوسط هو الصفر وبتباين ثابت هو σ_ε^2 . ثم إن لوغاريتم دالة المعقولية الشرطية المناسبة لقيم المعالم $(\phi, \theta, \sigma_\varepsilon^2)$ معطاة بالعلاقة:

$$\log L(\phi, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = -n \log \sigma_\varepsilon^2 - \frac{S(\phi, \theta)}{2\sigma_\varepsilon^2} \dots (8.55)$$

نسمي المعادلة (55.8) لوغاريتم دالة المعقولية الشرطية لأن مجموع مربعات الأخطاء $S(\phi, \theta)$ يعتمد على القيم الماضية وغير الملاحظة وهي $w_0, w_{-1}, \dots, w_{-p+1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{-q+1}$ حيث أن الملاحظة الأولى، ε_1 ، مثلا، للمعادلة (53.8) هي:

$$\varepsilon_1 = w_1 - \phi_1 w_0 - \phi_2 w_{-1} - \dots - \phi_p w_{-p+1} + \theta_1 \varepsilon_0 + \dots + \theta_q \varepsilon_{-q+1}$$

وإذا وضعنا مشكل تحديد القيم الماضية وغير الملاحظة لـ w_t و ε_t جانبا، فإن المعادلة (55.8) تبين بوضوح أن مقدار المعقولية العظمى لـ ϕ و θ يعطي بواسطة تصغير العبارة $S(\phi, \theta)$. ومنه، ففي فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء، تكون مقدرات المعقولية العظمى هي نفسها مقدرات المربعات الصغرى. ولإنطلاق السلسلة، نقول بأنه نظرا إلى أن مجموع مربعات الدالة $S(\phi, \theta)$ وبالتالي المعادلة (55.8)، مشروط بالقيم الماضية وغير الملاحظة لكل من w_t مع $(w_0, w_{-1}, \dots, w_{-p+1})$ و ε_t من $(\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-q+1})$ ، فإن مقدرات المربعات الصغرى المحصل عليها تعتمد على إختيارنا للقيم المعطاة للسلسلة غير الملاحظة $(w_0, w_{-1}, \dots, w_{-p+1})$. لهدف إستعمالها في تصغير قيم دالة المربعات الصغرى الشرطية. ويقترح بعض الكتاب (5) وضع قيم السلسلتين غير الملاحظتين لـ w_t و ε_t مساوية لقيمها المتوقعة وغير المشروطة. حيث أن القيم المتوقعة وغير المشروطة لهتين السلسلتين تكون مساوية للصفر. حيث يقترح علينا هذا

5- Pyndick.R.S and Rubinfeld .D.L "Econometric Models and Economic Forecasts" International Student, Edition 1981 PP: 541-548.

الحل تقريبا جيدا للطريقة الصحيحة للتقدير شريطة أن تكون القيم الحالية للموجه ϕ غير قريبة من الواحد مع عدد الملاحظات n واسع بالمقارنة مع المرتبتين p و q . ولإيجاد قيم الموجهين ϕ و θ الذين يصغران المقدار:

$$S(\phi, \theta) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^n [\varepsilon_t / \phi, \theta, w]^2 \dots (8.56)$$

نفرض أن إنطلاق السلسلة أصبح معتمدا على القيم المتوقعة وغير الشرطية للسلسلتين غير الملاحظتين أعلاه، وإذا كان النموذج (53.8) هو نموذج إنحدار ذاتي فقط أي:

$$\phi(L)w_t = \varepsilon_t \dots (8.57)$$

أو بالصيغة:

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + \varepsilon_t$$

ويمكن تقدير موجه المعالم ϕ بواسطة المربعات الصغرى الخطية، وبفرض أن النموذج مخصص بطريقة جيدة ومستقر- فإن مقدرات المربعات الصغرى العادية للموجه ϕ تكون متسقة وتقاربا طبيعية (الفصل السابع). ويمكن اعتبار التقدير بواسطة المعقولية العظمى في العينات المنتهية متكافئا مع تقدير بواسطة المربعات الصغرى في ظل الفرضية القائلة بأن الأخطاء طبيعية ε_t مستقلة ومتماثلة التوزيع والمكونة شرطيا على أساس ملاحظات p الأولى للسلسلة w . وإذا مثلنا $AR(p)$ في شكل مصفوفات تكون لدينا:

$$w_1 = \phi_1 w_0 + \dots + \phi_p w_{1-p} + \varepsilon_1$$

$$w_2 - \phi_1 w_1 = \phi_2 w_0 + \dots + \phi_p w_{2-p} + \varepsilon_2$$

⋮

$$w_p - \phi_1 w_{p-1} - \dots - \phi_{p-1} w_1 = \phi_p w_0 + \varepsilon_p$$

$$w_{p+1} - \phi_1 w_p - \dots - \phi_p w_1 = \varepsilon_{p+1}$$

ولتكن:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad w^* = \begin{pmatrix} w_{1-p} \\ \vdots \\ w_0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

لينتج لدينا:

$$AW = A^*W^* + \varepsilon \dots (8.57)$$

حيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\phi_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\phi_p & & \ddots & 0 \\ 0 & -\phi_p & \dots & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} \phi_p & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(a) فإذا كانت w^* عشوائية ومستقلة عن ε فإن:

$$\text{var}(Aw) = \text{var}(A^*w^*) + \text{var}(\varepsilon)$$

$$A \text{var}(w) A' = A^* \text{var}(w^*) A^{*'} + \sigma_\varepsilon^2 I_n$$

ومنه إذا كانت السلسلة $w^* = (w_{1-p}, \dots, w_0)$ بالنسبة لكل t هي جزء من السلسلة $AR(p)$ ينتج أن $\text{var}(w^*)$ تكون أية مصفوفة جزئية أساسية لـ $\text{var}(w)$. أما إذا كانت $E(w^*) = 0$ فمن أجل أي مصفوفة تباين مشترك تكون:

$$\text{var}(w) = A^{-1} \left[A^* \text{var}(w^*) A^{*'} + \sigma_\varepsilon^2 I_n \right] A'^{-1}$$

(b) إذا كانت w^* مثبتة وتختلف عن الصفر فإن:

$$w = A^{-1} A^* w^* + A^{-1} \varepsilon$$

$$E(w) = A^{-1} A^* w^*$$

$$\text{var}(w) = \sigma_\varepsilon^2 A^{-1} A'^{-1} \neq E(ww')$$

وفي حالة $w^* = 0$ فإن $E(w) = 0$ لينتج أن:

$$\text{var}(w) = \sigma_\varepsilon^2 A^{-1} A'^{-1} = E(ww')$$

لينتج أن:

$$Aw = \varepsilon$$

أي أن:

$$w_1 = \varepsilon_1$$

$$w_2 - \phi_1 w_1 = \varepsilon_2$$

⋮

$$w_{p+1} - \phi_1 w_p - \dots - \phi_p w_1 = \varepsilon_p$$

وهذا متكافئ مع الفرضية القائلة بأن w^* غير معروفة والتي تعني أنه هناك ضياع p ملاحظات. وتبدأ السيرورة عند الملاحظة w_{p+1} ، مع معاملة السلسلة (w_1, \dots, w_p) كقيم إنطلاق.

بالرغم من أنه في نموذج الإنحدار الذاتي $AR(p)$ ، تكون سيرورة التقدير أساسا هي عبارة عن إنحدار خطي، قد يكون المشكل أصعب بكثير إذا احتوى النموذج المقدر على الجزء الخاص بالمتوسط المتحرك. فمثلا إذا أخذنا دالة المعقولية من أجل $w \sim N(\mu, \psi)$ ، يكون:

$$\log L(w, \psi) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\psi| - \frac{1}{2} (w - \mu)' \psi^{-1} (w - \mu)$$

وفي حالة الإستقرار $\mu = 0$ ، تكون ψ غير معروفة من أجل $AR(p)$ ، أي أن ψ هي دالة للمعالم المطلوب تقديرها وهي $\phi, \sigma_\varepsilon^2$. (a) إذا كانت قيم الإنطلاق مثبتة ينتج أن:

$$w \sim N\left(A^{-1}A^*w^*, \sigma_\varepsilon^2 A^{-1}A^{-1'}\right)$$

لنجد لوغاريتم دالة المعقولية على الشكل:

$$\log L(w, \psi) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2} \log |A^{-1}A^{-1'}| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (w - A^{-1}A^*w^*)' A' A (w - A^{-1}A^*w^*)$$

ومع $\log |A^{-1}A^{-1'}| = 0$ ، نستطيع تقدير هذه الدالة إذا كانت w^* معروفة.

(b) إذ أخذنا قيم إنطلاق مساوية للصفر، يصبح لوغاريتم دالة المعقولية على الشكل:

$$\log L(w, \psi) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} w' A' A w$$

حيث أن:

$$w' A' A w \approx \sum_{t=p+1}^n \left[w_t - \phi_1 w_{t-1} - \dots - \phi_p w_{t-p} \right]^2$$

وتصبح:

$$w_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$w_1 = \varepsilon_1 + \theta_1 \varepsilon_0 + \dots + \theta_q \varepsilon_{1-q}$$

$$w_2 = \varepsilon_2 + \theta_1 \varepsilon_1 + \theta_2 \varepsilon_0 + \dots + \theta_q \varepsilon_{2-q}$$

⋮

$$w_q = \varepsilon_q + \theta_1 \varepsilon_{q-1} + \dots + \theta_{q-1} \varepsilon_1 + \theta_q \varepsilon_0$$

$$w_{q+1} = \varepsilon_{q+1} + \theta_1 \varepsilon_q + \dots + \theta_q \varepsilon_1$$

⋮

$$w_n = \varepsilon_n + \theta_1 \varepsilon_{n-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{n-q}$$

وإذا كتبنا:

$$\varepsilon^* = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1-q} \\ \vdots \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \theta_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \theta_q & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ 0 & \theta_q & \dots & \theta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N^* = \begin{bmatrix} \theta_q & \dots & \dots & \dots & \theta_1 \\ 0 & \theta_q & \dots & \dots & \theta_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \theta_q \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ينتج لدينا:

$$w = N\varepsilon + N^*\varepsilon^*$$

وهناك حالتان:

(a) لما يكون ε^* عشوائي مع $\text{var}(\varepsilon^*) = \sigma_u^2 I_q$ فهذا معناه أن

$$\text{var}(w) = \sigma_\varepsilon^2 NN' + \sigma_u^2 N^* N^{*'}.$$

(b) وعندما يكون ε^* عشوائي ويختلف عن الصفر فإن:

$$E(w) = N^* \varepsilon^*$$

$$\text{var}(w) = \sigma_\varepsilon^2 NN'$$

أما لما يكون ε^* عشوائي ويساوي الصفر فينتج:

$$E(w) = 0$$

$$\text{var}(w) = \sigma_\varepsilon^2 NN'$$

ويكون لوغاريتم دالة المعقولية العظمى للسيرورة $MA(q)$ هو:

$$\log L(w, \psi) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\text{var}(w)| - \frac{1}{2} w' [\text{var}(w)]^{-1} w$$

ومن أجل الإستقرار التام، $\mu = 0$ ، يصعب علينا حساب لوغاريتم دالة المعقولية أعلاه. وفي حالة نقاط إنطلاق مساوية للصفر (كما ذكرنا أعلاه)، فإن المقدرات المحصلة تكون متكافئة مع الحالة التي تكون فيها N^* معروفة، وتكون سهلة التحليل.

نعود الآن إلى الحالة المحتوية على النوعين (MA و AR) كما بالمعادلة

(56.8)، حيث نعيد كتابة المعادلة (53.8):

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(L) \cdot \phi(L) w_t$$

والتي تعني أنها غير خطية في المعالم، ولا يمكن تقديرها بواسطة التطبيق المباشر للمربعات الصغرى العادية. وبإدخال طريقة التقدير غير الخطي لـ Gauss-Newton، مستعملين توسيعات سلاسل تايلور لضبط المعادلة (53.8) في شكل خطي، حول قيمة إنطلاق معينة للموجهين ϕ و θ ، نعيد هذه السيرورة حتى يحدث التقارب. فإذا أخذنا نموذج السيرورة $ARMA(1,1)$ كمثال ونعتبر:

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots (8.57)$$

مع ε_t مستقلة ومتماثلة التوزيع بالنسبة لكل t . ومن أجل $|\theta_1| < 1$ ، نضرب طرفي (57.8) بالمقدار $\theta^{-1}(L)$ لنجد:

$$\theta^{-1}(L)w_t = \theta^{-1}(L) \cdot \phi_1 w_{t-1} + \varepsilon_t \dots (8.58)$$

أو بصيغة أخرى:

$$\theta^{-1}(L)\phi(L)w_t = \varepsilon_t \dots (8.59)$$

حيث أن:

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L$$

$$\theta^{-1}(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_1^2 L^2 + \dots$$

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L$$

إن المشكل الأساسي في المعادلة (58.8) هو كيفية شرح المتغير المحول $\theta^{-1}(L)w_t$. فهذا المتغير هو عبارة عن مجموع الترجيحات للقيم الحالية والماضية للسلسلة w المحتوية على قيم العينة السابقة والتي تكون غير ملاحظة. وإذا فرضنا أن كل قيم العينة السابقة للسلسلة w مساوية للصفر، تصبح العملية بسيطة. فإنتظافاً من هذه الفرضية، تكون السلسلة المحولة هي:

$$w_t^* = \theta^{-1}(L)w_t; t = 1, \dots, n \dots (8.60)$$

والتي هي على الشكل:

$$w_1^* = w_1$$

$$w_2^* = w_2 + \theta_1 w_1$$

$$w_3^* = w_3 + \theta_1 w_2 + \theta_1^2 w_1$$

$$w_4^* = w_4 + \theta_1 w_3 + \theta_1^2 w_2 + \theta_1^3 w_1$$

⋮

$$w_t^* = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \dots + \theta_1^{t-1} w_1$$

لنستنتج أنه يمكن معرفة السلسلة w_t^* مباشرة من قانون التراجع على الشكل:

$$w_t^* = w_t + \theta_1 w_{t-1}^*; t = 1, \dots, n \dots (8.61)$$

مع $w_0^* = 0$

ومنه يمكن إعادة كتابة (58.8) على الشكل:

$$w_t^* = \phi_1 w_{t-1}^* + \varepsilon_t \dots \dots (8.62)$$

حيث أن (62.8) خطية في ϕ_1 . وإذا كانت θ_1 معطاة فإن قيم السلسلة المحولة w_t^* تصبح معروفة ليكون التطبيق المباشر لقانون المربعات الصغرى العادية يعطي مقدرا متسقاً لـ ϕ_1 . عملياً، تكون θ_1 غير معروفة، ومنه نضطر لتطبيق التقدير غير الخطي. وأبسط طريقة للحصول على المقدرات غير الخطية $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\phi}_1$ هي استعمال طريقة البحث بمجال. حيث أن تطبيق قانون المربعات الصغرى من أجل قيمة لـ θ_1 في مجال مختار ويحقق الشرط $|\theta_1| < 1$ يعطي مقدرات متسقة. فمثلاً نختار المجال $\theta \in]-1, +1[$ ونغير تدريجياً قيمة θ_1 في هذا المجال مطبقين، في كل مرة، قانون المربعات الصغرى من أجل الحصول على $\hat{\phi}_1$. ثم نختار قيمة θ_1 التي تحقق لنا أصغر قيمة لمجموع مربعات البواقي للاتحاد (62.8). لكن عملياً تصبح هذه العملية مملة وتأخذ وقتاً أكبر لما نواجهه سيرورات لها مرتبة $q \geq 2$. لذا يفضل أغلب الكتاب استعمال طرق التدنئة مثل طريقة Gauss-Newton للمربعات الصغرى غير الخطية، مثلما تكلمنا عنها في الفصلين الخامس والسابع. وإذا كتبنا المعادلة (57.8) في شكل المعادلة (53.8) مستعملين التعريف (62.8) نجد:

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(L)\phi(L)w_t = w_t^* - \phi_1 w_{t-1}^* \dots \dots (8.63)$$

حيث أن:

$$\phi(L)w_t = w_t - \phi_1 w_{t-1}$$

ومادام ε_t في (63.8) ليس خطياً في θ_1 و ϕ_1 . فنستعمل توسيعات سلاسل تايلور للسلسلة ε_t حول البواقي المقدرة $\hat{\varepsilon}_t$ لنجد:

$$\varepsilon_t = \hat{\varepsilon}_t + [\partial \varepsilon_t / \partial \phi_1](\phi_1 - \hat{\phi}_1) + [\partial \varepsilon_t / \partial \theta_1](\theta_1 - \hat{\theta}_1) + R_1 \dots (8.64)$$

وبوضع $R_1 = 0$ نجد:

$$\hat{\varepsilon}_t = \frac{-\partial \varepsilon_t}{\partial \phi_1}(\phi_1 - \hat{\phi}_1) - \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_1}(\theta_1 - \hat{\theta}_1) + \varepsilon_t \dots \dots (8.65)$$

يمكن اعتبار المعادلة (65.8) على أنها إنحدار خطي حيث أن $\hat{\varepsilon}_t$ متغير تابع والمشتقات الجزئية $(-\partial \varepsilon_t / \partial \theta_1)$ و $(-\partial \varepsilon_t / \partial \phi_1)$ مقيمة عند $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\phi}_1$ على الترتيب، هي المتغيرات المفسرة (المستقلة). إن حساب الإنحدار بالمعادلة (65.8) سوف يقدر القيم المراجعة للحصول على مقدرات جديدة للمعلمتين θ_1 و ϕ_1 . ويحدث ذلك عن طريق تقسيم المشتقات في المعادلة (64.8) مستعملين المعادلة (63.8) في كل خطوة مراجعة والتي تعطي:

$$\partial \varepsilon_t / \partial \phi_1 = -w_{t-1}^* \dots (8.66)$$

أما بالنسبة للمقدار $\partial \varepsilon_t / \partial \theta_1$ فنكتب النموذج في شكل المعادلة (57.8) حتى تظهر θ_1 بشكل واضح:

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

لنجد أن:

$$\varepsilon_t = w_t - \phi_1 w_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots (8.67)$$

ومادام w_t و w_{t-1} ملاحظتين من أجل كل t ، فإن:

$$\partial \varepsilon_t / \partial \theta_1 = \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \frac{\partial \varepsilon_{t-1}}{\partial \theta_1} \dots (8.68)$$

ونستعمل (68.8) بالتراجع مع إعتبار $\partial \varepsilon_t / \partial \theta_1 = 0$ لما $t < 1$. ويمكن إعادة كتابة (68.8) على الشكل:

$$(1 - \theta_1 L) \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_1} = \varepsilon_{t-1}$$

ولنعرف المتغير المحول على الشكل:

$$\varepsilon_{t-1}^* = \frac{-\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_1} = -\frac{-\varepsilon_{t-1}}{1 - \theta_1 L} \dots (8.69)$$

ومن ثم تتطلب طريقة Gauss-Newton تحديد البواقي المقدرة ε_t^* في المتغيرات w_{t-1}^* و $-\varepsilon_{t-1}^*$ ، لتقدير التراجعات للمقدرات $\hat{\phi}_1$ و $\hat{\theta}_1$ على الترتيب. إن المتغيرات المكونة أعلاه يجب مراجعتها عند كل مرحلة من سيرة التكرار لأنها تعتمد على المقدرات الحالية. ونواصل العملية حتى تقترب المقدرات المراجعة من الصفر.

8-6-3 مرحلة التأكد من التشخيص Diagnostic Checking

يمكن إضافة متغيرات الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك للنموذج في مرحلة التأكد من التشخيص ومن ثم ندرس ونختبر معنوياتها الإحصائية. وهناك أداة هامة في هذا الميدان وهي استعمال معيار معلومة Akaike والذي يساعد على اتخاذ قرار زيادة متغيرات إضافية للنموذج أم لا. كما يمكن إختبار البواقي والنظر ما إذا كانت عشوائية أو لا. إن دوال الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للبواقي يمكن أن تبين ما كان من السهل شرحها بواسطة السيرورة ARMA. فإذا كانت البواقي ممثلة جيدا بواسطة السيرورة AR(p)، يمكن زيادة مرتبة p للسيرورة الأصلية ARMA. وإذا كانت ممثلة جيدا بواسطة السيرورة MA(q)، يمكن زيادة مرتبة q. وبعد إعادة تخصيص النموذج، نعيد تقديره، ونطبق فكرة التأكد من التشخيص مرة أخرى حتى تصبح المعالم ϕ_j ، θ_i ذات معنوية، والبواقي تقريبا عشوائية وذات اضطراب أبيض.

عمليا، يكون النموذج المميز في مرحلة أولى غير مضمون النتائج. فيمكن لنا أن نختار نموذجا خاصا ونعتبره الأحسن، لكن عند مناقشة صلاحيته ميدانيا يمكن أن يظهر العكس. وهناك عدة طرق لتشخيص النموذج المميز، من بينها طريقة Goldfrey 1979، حيث يقترح النموذج:

$$\phi(L)w_t = \theta(L)\varepsilon_t \dots (8.70)$$

حيث أن:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p - \phi_{p+1} L^{p+1} - \dots - \phi_{p+p^*} L^{p+p^*}$$

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q - \theta_{q+1} L^{q+1} - \dots - \theta_{q+q^*} L^{q+q^*}$$

وتكون المعالم ϕ_{p+j} ، θ_{q+i} ، في البداية مساوية للصفر، حيث أن:

$$i = 1, 2, \dots, q^*$$

$$j = 1, 2, \dots, p^*$$

ثم نقدر النموذج الموسع في (70.8) بالطرق المتحدث عنها سابقا. ومن ثم، فإن الإتحافات المعيارية لمقدرات المعالم المضافة سوف تبين ما إذا كانت هذه المعالم المضافة تختلف عن الصفر أو لا. كما يمكن إستعمال إختبار LM المقترح من طرف Goldfrey. يعتمد هذا الإختبار على مشتقات لوغاريتم دالة المعقولية بالنسبة للمعالم المضافة، والمقيمة عند المعالم المقدرة في ظل الفرضية H_0 والقائلة بأن النموذج الأصلي هو الصحيح. نبين في ظل H_0 صحيحة بأن هذه المشتقات لها توزيعات تقاربية طبيعية. ومن أجل $ARMA(p,q)$ المعممة بواسطة المبتكرات يمكن كتابة:

$$\log L(\phi, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma_\varepsilon^2 - \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 / 2\sigma_\varepsilon^2 \dots (8.71)$$

حيث أن:

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(L)\phi(L)w_t = \left(1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q\right)^{-1} \left(1 + \phi_1 L + \dots + \phi_p L^p\right) w_t$$

وتكون المشتقات الجزئية لهذه الدالة بالنسبة لمعالم الإتحاد الذاتي والمتوسط المتحرك هي على الترتيب:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \phi_j} = \sum_{t=1}^n \left(1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q\right)^{-1} w_{t-j} \cdot \varepsilon_t / \sigma_\varepsilon^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \theta_i} &= \sum_{t=1}^n \left(1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q\right)^{-2} \left(1 + \phi_1 L + \dots + \phi_p L^p\right) w_{t-i} \cdot \varepsilon_t / \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sum_{t=1}^n \left(1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q\right)^{-1} \varepsilon_{t-i} \cdot \varepsilon_t / \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

ويعتمد إختبار LM الإحصائي على هذه المشتقات. حيث نعتبر النموذج الخاص بالسلسلة المفرقة w_t مع عينة ملاحظات n .

$$w_t - \phi_1 w_{t-1} - \dots - \phi_p w_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$\phi(L)w_t = \theta(L)\varepsilon_t \dots (8.72)$$

ونمثل مقدرات المعقولية العظمى بواسطة $\hat{\phi}_j$ و $\hat{\theta}_i$ والبواقي بواسطة:

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\theta}^{-1}(L) \cdot \hat{\phi}(L) \tilde{w}_t$$

حيث أن \tilde{w}_t هي القيم الملاحظة فقط للسيرورة w_t . ونكون السلسلتين X_t و Z_t من:

$$\hat{\theta}(L)X_t - \tilde{w}_t \Rightarrow X_t - \tilde{w}_t - \hat{\theta}_1 X_{t-1} - \dots - \hat{\theta}_q X_{t-q} \dots (8.73)$$

$$\hat{\theta}(L)Z_t = \hat{\varepsilon}_t \Rightarrow Z_t = \hat{\varepsilon}_t - \hat{\theta}_1 Z_{t-1} - \dots - \hat{\theta}_q Z_{t-q} \dots (8.74)$$

ونبدأ الحسابات، عمليا، في (73.8) و (74.8) بواسطة وضع X_t و Z_t مساوية للصفر من أجل $t=(1-q), \dots, -1, 0$. ولنعتبر الآن مشكلة إختبار نموذجنا بأنه مخصص بطريقة صحيحة ضد الفرضية البديلة والقائلة بأنه يجب إضافة m معالم في الجزء MA وبالتالي يجب إختبار الفرضية:

$$H_0: \text{ARMA}(p, q)$$

$$H_A: \text{ARMA}(p, q+m)$$

ويقترح Goldfrey إستعمال إختبار LM عن طريق تقدير نموذج الإنحدار التالي بواسطة المربعات الصغرى.

$$\hat{\varepsilon}_t = \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \beta_1 Z_{t-1} + \dots + \beta_{q+m} Z_{t-q-m} + u_t \dots (8.75)$$

حيث أن α_i و β_j هي معالم و u_t هو حد الأخطاء. وليكن يمثل البواقي من معادلة الإنحدار المقدرة في (75.8). ثم تحت H_0 صحيحة نجري الإختبار:

$$Q = n \left[1 - \frac{\sum \hat{u}_t^2}{\sum \hat{\varepsilon}_t^2} \right] \sim \chi_m^2 \dots (8.76)$$

ومن أجل قيم كبيرة لهذه الإحصاءة Q نرفض H_0 . وطور Goldfrey كذلك LM ضد الفرضية البديلة والقائلة بأن النموذج الصحيح هو $\text{ARMA}(p_1, q_1)$. حيث نتبع في هذه الحالة نفس الخطوات السابقة. ويرى (6) Granger-Newbold 1986 أنه يمكن تطوير هذا الإختبار إلى أي شكل من النوع $\text{ARMA}(p + k_1, q + k_2)$ ، حيث أن m هنا تساوي إلى أكبر قيمة لـ k_1 و k_2 أي $m = \text{Max}(k_1, k_2)$.

6- Granger.W.J and Newbold.P 1986, PP: 96-101 (مرجع سابق)

وعلى العموم يجب النظر إلى النموذج الذي له أصغر عدد من المعالم المتناسقة مع الفرضية القائلة بأن حدود الأخطاء لها اضطراب أبيض. كما أن هناك بعض المقاييس عند تقدير السلاسل الزمنية مثل:

$$AIC = n \log \hat{\sigma}_e^2 + 2k$$

حيث أن $\hat{\sigma}_e^2$ هي مقدار التباين لسلسلة البواقي بالنسبة لنموذجين معتمدين على نفس السلسلة ونفس عدد الملاحظات. ونختار النموذج الذي له أصغر قيمة لـ AIC. أما إذا كانت السلسلة لها طول مختلف، كما أشرنا من قبل، فإننا نستعمل AIC المعياري وهو:

$$NAIC = AIC/n$$

7-8 التنبؤ بواسطة نماذج السلاسل الزمنية:

إن الهدف من التنبؤ هو استعمال النموذج الحالي والمقدر في فترة زمنية معطاة، من أجل تقدير القيم المستقبلية كسلسلة زمنية تبعا لأصغر خطأ ممكن. لذا نعتبر التنبؤ ذي أصغر وسط لمربع خطأ التنبؤ Minimum Mean Square Forecast Error (MMSFE) تنبؤا أمثلا. ومادام خطأ التنبؤ هو متغير عشوائي، نقوم بتصغير قيمته المتوقعة. نأمل في اختيار تنبؤنا $\hat{Y}_n^{(m)}$ بحيث تكون العبارة:

$$E[e_n^{2(m)}] = E\left[\left(Y_{n+m} - \hat{Y}_n^{(m)}\right)^2\right], \quad m \geq 1$$

مصغرة. إن $\hat{Y}_n^{(m)}$ هو التنبؤ الأصلي للفترة المستقبلية m . ونفرض، أن المعالم الحقيقية للنموذج:

$$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t, \dots (8.77)$$

تكون معرفة ومنه يمكن أن ندرس خصائص هذا التنبؤ وخطأ التنبؤ. ليكن هذا التنبؤ معطى بواسطة التوقع الشرطي لـ Y_{n+m} أي أن:

$$\hat{Y}_n^{(m)} = E[Y_{n+m} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1] \dots (8.78)$$

ولكي نبين بأن أصغر وسط لمربع خطأ التنبؤ هو معطى بالعلاقة (78.8). نعيد كتابة النموذج $ARIMA(p,d,q)$ بالمعادلة (77.8) على الشكل:

$$Y_t = \phi^{-1}(L)(1-L)^{-d}\theta(L)\varepsilon_t = \psi(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \dots (8.79)$$

حيث أن النموذج (79.8) عبارة عن سيرة المتوسط المتحرك فقط ولكن بمرتبة لانهاية. ومنه يمكن كتابة التنبؤ الحقيقي للفترة المستقبلية m على النحو:

$$\begin{aligned} Y_{n+m} &= \psi_0 \varepsilon_{n+m} + \psi_1 \varepsilon_{n+m-1} + \dots + \psi_m \varepsilon_n + \psi_{m+1} \varepsilon_{n-1} + \dots \\ &= \psi_0 \varepsilon_{n+m} + \psi_1 \varepsilon_{n+m-1} + \dots + \psi_{m-1} \varepsilon_{n+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{m+j} \varepsilon_{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j \varepsilon_{n+m-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{m+j} \varepsilon_{n-j} \dots (8.80) \end{aligned}$$

نلاحظ أن التنبؤ $\hat{Y}_n^{(m)}$ يمكن أن يعتمد على المعلومة المتوفرة خلال الفترة n فقط. ويكون هدفنا هو مقارنة هذا التنبؤ مع القيمة الحالية Y_{n+m} كما هي ممثلة بالمعادلة (80.8). وللقيام بذلك نكتب التنبؤ كمجموع مرجحات لتلك الحدود من الأخطاء التي يمكن تقديرها وهي $(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \dots)$ ليكون التنبؤ الأمثل هو:

$$\hat{Y}_n^{(m)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{m+j}^* \varepsilon_{n-j} \dots (8.81)$$

حيث أن ψ_{m+j}^* مختارة بطريقة مثلى لتصغير وسط مربعات خطأ التنبؤ $MSFE$. وباستعمال المعادلتين (80.8) و (81.8) يمكن كتابة عبارة لخطأ التنبؤ $e_n^{(m)}$ على الشكل:

$$\begin{aligned} e_n^{(m)} &= Y_{n+m} - \hat{Y}_n^{(m)} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j \varepsilon_{n+m-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{m+j} \varepsilon_{n-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{m+j}^* \varepsilon_{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j \varepsilon_{n+m-j} + \sum_{j=0}^{\infty} [\psi_{m+j} - \psi_{m+j}^*] \varepsilon_{n-j} \dots (8.82) \end{aligned}$$

ومادام لدينا $\varepsilon_i \sim \text{IID}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ وكذلك $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ ، فإن وسط مربع خطأ التنبؤ يكون:

$$\begin{aligned} \text{MSFE} = E(e_n^{(m)})^2 &= (\psi_0^2 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{m-1}^2) \sigma_\varepsilon^2 + \sum_{j=0}^{\infty} [\psi_{m+j} - \psi_{m+j}^*] \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left[\sum_{j=0}^{m-1} \psi_j^2 + \sum_{j=0}^{\infty} [\psi_{m+j} - \psi_{m+j}^*] \right] \dots (8.83) \end{aligned}$$

من العبارة (83.8) نلاحظ أن تصغير MSFE يتم بواسطة وضع المبرجات المثلى ψ_{m+j}^* مساوية للمبرجات الحقيقية ψ_{m+j} من أجل $j=0,1,\dots$. ومادام التنبؤ الأمثل $\hat{Y}_n^{(m)}$ هو عبارة عن التوقع الشرطي لـ Y_{n+m} ، يمكن أخذ التوقع الشرطي للعبارة (80.8). حيث تكون القيم المتوقعة للسلسلة ε_{n+j} ($j=0,1,\dots,m-1$) كلها مساوية للصفر، بينما القيم المتوقعة للسلسلة ε_{n-j} ($j=0,1,\dots$) فهي الأخطاء الملاحظة في الفترة الحالية، وهي البواقي الناتجة عن المعادلة المقدرة، ولهذا لدينا:

$$\hat{Y}_n^{(m)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{m+j} \hat{\varepsilon}_{n-j} = E[Y_{n+m} / Y_n, \dots, Y_1] \dots (8.84)$$

إن التنبؤ المبين بالعبارة (84.8)، يكون أمثلاً، حيث أنه يصغر وسط مربعات الخطأ للتنبؤ الشرطي، إن وسط مربع الخطأ مكون من حد التباين وحد مربع التحيز. ومادام (84.8)، بالتعريف، تساوي للتوقع الشرطي لـ Y_{n+m} ، فإن خطأ التنبؤ بالعبارة (82.8) له توقع شرطي مساو للصفر. يعني ذلك أنه لا يوجد حد التحيز في وسط مربع الخطأ الشرطي، ويعطي تباين $e_n^{(m)}$ بالعبارة (83.8). ومادام لا يوجد قانون للخطأ يعطي وسط مربع الخطأ الشرطي أقل من ذلك المحصل في المعادلة (83.8) مع $\psi_{m+j} = \psi_{m+j}^*$ ، فإن المعادلة (84.8) تمثل قانون التنبؤ الأمثل لـ Y_{n+m} . ومنه فإن التنبؤ الأمثل لأي نموذج من النوع ARMA يمكن أن نعبر عنه في شكل مماثل للمعادلة (84.8) مع تباين لخطأ التنبؤ على الشكل:

$$\text{var}(e_n^{(m)}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j^2 \dots (8.85)$$

8-7-1 حساب التنبؤ:

يمكن إستعمال النموذج ARIMA المقدر لحساب التنبؤ $\hat{Y}_n^{(m)}$ ، حيث نحسب، أولاً، التنبؤ بفترة واحدة في المستقبل، ثم نستعمل هذا الأخير لحساب التنبؤ بفترتين في المستقبل، ونواصل نفس الطريقة حتى نصل إلى التنبؤ بالفترة m في المستقبل. ولنكتب نموذج ARIMA(p,d,q) على الشكل:

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \delta \dots (8.86)$$

أو على النحو:

$$\phi(L)w_t = \theta(L)\varepsilon_t + \delta$$

حيث أن:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

$$w_t = (1 - L)^d Y_t$$

ومنه، لحساب $\hat{Y}_n^{(m)}$ ، نبدأ بحساب تنبؤ الفترة الواحدة لـ w_t وهي $\hat{w}_n^{(1)}$. حيث نكتب (86.8) في الفترة الزمنية $(n+1)$:

$$w_{n+1} = \phi_1 w_n + \dots + \phi_p w_{n-p+1} + \varepsilon_{n+1} - \theta_1 \varepsilon_n - \dots - \theta_q \varepsilon_{n-q+1} + \delta \dots (8.87)$$

ثم نأخذ القيمة المتوقعة الشرطية لـ w_{n+1} في (87.8) لهدف حساب التنبؤ في الفترة الأولى $\hat{w}_n^{(1)}$ كما يلي:

$$\begin{aligned} \hat{w}_n^{(1)} &= E[w_{n+1} / w_n, \dots, w_1] \\ &= \phi_1 w_n + \dots + \phi_p w_{n-p+1} - \theta_1 \hat{\varepsilon}_n - \dots - \theta_q \hat{\varepsilon}_{n-q+1} + \delta \dots (8.88) \end{aligned}$$

حيث أن $\hat{\varepsilon}_n, \hat{\varepsilon}_{n-1}, \dots, \hat{\varepsilon}_{n-q+1}$ هي بواقفي ملاحظة، كما أن $E[\varepsilon_{n+1} / w_n, \dots]$ لنستعمل الآن $\hat{w}_n^{(1)}$ من أجل الحصول على فترة ثانية $\hat{w}_n^{(2)}$ كما يلي:

$$\begin{aligned} \hat{w}_n^{(2)} &= E[w_{n+2} / w_n, w_{n-1}, \dots, w_1] \\ &= \phi_1 \hat{w}_n^{(1)} + \phi_2 w_n + \dots + \phi_p w_{n-p+2} - \theta_1 \hat{\varepsilon}_n - \dots - \theta_q \hat{\varepsilon}_{n-q+2} + \delta \dots (8.89) \end{aligned}$$

ثم نستعمل $\hat{w}_n^{(2)}$ لنحصل على $\hat{w}_n^{(3)}$ ، وهكذا نواصل التعويض إلى أن نصل إلى:

$$\hat{w}_n^{(m)} = \phi_1 \hat{w}_n^{(m-1)} + \dots + \phi_m w_n + \dots + \phi_p w_{n-p+m} - \theta_1 \hat{\varepsilon}_n - \dots - \theta_q \hat{\varepsilon}_{n-q+m} + \delta \dots (8.90)$$

ومنه يمكن القول بأنه إذا كانت $m > p$ و $m > q$ فإن هذا التنبؤ يصبح:

$$\hat{\psi}_n^{(m)} = \phi_1 \hat{w}_n^{(m-1)} + \dots + \phi_p \hat{w}_n^{(m-p)}$$

ثم نعود للسلسلة الأصلية Y_t بواسطة تطبيق القانون:

$$w_t = (1-L)^d Y_t \Rightarrow Y_t = (1-L)^{-d} w_t$$

ولنفرض مثلاً، أن $d=1$ ، فإن التنبؤ لـ m فترة بالنسبة للسلسلة الأصلية Y_t يكون:

$$\hat{Y}_n^{(m)} = Y_n + \hat{w}_n^{(1)} + \hat{w}_n^{(2)} + \dots + \hat{w}_n^{(m)}$$

ولما $d=2$ ينتج:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_n^{(m)} &= Y_n + \left[\Delta Y_n + \hat{w}_n^{(1)} \right] + \left[\Delta Y_n + \hat{w}_n^{(1)} + \hat{w}_n^{(2)} + \dots \right] + \left[\Delta Y_n + \hat{w}_n^{(1)} + \dots + \hat{w}_n^{(m)} \right] \\ &= Y_n + m \Delta Y_n + m \hat{w}_n^{(1)} + (m-1) \hat{w}_n^{(2)} + \dots + \hat{w}_n^{(m)} \dots \dots \dots (8.91) \end{aligned}$$

1-1-7-8 حساب التنبؤ للسيرورة AR(1):

ليكن نموذج الإنحدار الذاتي من المرتبة الأولى:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \dots (8.92)$$

إن التنبؤ بالفترة الأولى هو:

$$\hat{Y}_n^{(1)} = E[Y_{n+1} / Y_n, \dots, Y_1] = \phi_1 Y_n + \delta$$

وبالفترة الثانية:

$$\hat{Y}_n^{(2)} = \phi_1 \hat{Y}_n^{(1)} + \delta = \phi_1^2 Y_n + (1 + \phi_1) \delta$$

وبالفترة m :

$$\hat{Y}_n^{(m)} = \phi_1^m Y_n + (\phi_1^{m-1} + \phi_1^{m-2} + \dots + \phi_1 + 1) \delta$$

أي أن:

$$\hat{Y}_n^{(m)} = \phi_1^m Y_n + \delta \sum_{j=0}^{m-1} \phi_1^j \dots (8.93)$$

ولما تكون m كبيرة، فإن التنبؤ يتقارب للقيمة:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\hat{Y}_n^{(m)}) = \delta \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j = \delta / (1 - \phi_1) \dots (8.94)$$

وبناء على المعادلة (17.8)، نلاحظ أن التنبؤ يذهب إلى وسط السلسلة كلما إرتفعت قيمة m أي أن:

$$E(Y_t) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\hat{Y}_n^{(m)}) = \delta / (1 - \phi_1): |\phi_1| < 1 \dots (8.95)$$

ولنحسب الآن خطأ تنبؤ هذه السيرورة AR(1):

$$\begin{aligned} e_n^{(m)} &= [Y_{n+m} - \hat{Y}_n^{(m)}] \\ &= \phi_1 Y_{n+m-1} + \delta + \varepsilon_{n+m} - \hat{Y}_n^{(m)} \\ &= \phi_1^2 Y_{n+m-2} + (\phi_1 + 1)\delta + \varepsilon_{n+m} + \phi_1 \varepsilon_{n+m-1} - \hat{Y}_n^{(m)} \end{aligned}$$

وبمواصلة التعويض عن Y_{n+m-2} نصل إلى:

$$e_n^{(m)} = \phi_1^m Y_n + (\phi_1^{m-1} + \phi_1^{m-2} + \dots + \phi_1 + 1)\delta + \varepsilon_{n+m} + \phi_1 \varepsilon_{n+m-1} + \dots + \phi_1^{m-1} \varepsilon_{n+1} - \hat{Y}_n^{(m)}$$

وهي على الشكل:

$$e_n^{(m)} = \phi_1^m Y_n + \delta \sum_{j=0}^{m-1} \phi_1^j + \sum_{j=0}^{m-1} \phi_1^j \varepsilon_{n+m-j} - \hat{Y}_n^{(m)} \dots (8.96)$$

وبتعويض المعادلة (93.8) من أجل $\hat{Y}_n^{(m)}$ نجد خطأ تنبؤ السيرورة AR(1) على النحو:

$$e_n^{(m)} = \sum_{j=0}^{m-1} \phi_1^j \varepsilon_{n+m-j} \dots (8.97)$$

ويعطى تباينه بالعلاقة:

$$\begin{aligned} \text{var}(e_n^{(m)}) &= (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \dots + \phi_1^{2m-2}) \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{m-1} \phi_1^{2j} \dots (8.97)' \end{aligned}$$

2-1-7-8 حساب التنبؤ للسيرورة MA(1):

ليكن نموذج المتوسط المتحرك من المرتبة الأولى على الشكل:

$$Y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots (8.98)$$

ويكون التنبؤ الشرطي بفترة واحدة، في المستقبل هو:

$$\hat{Y}_n^{(1)} = E[Y_{n+1}/Y_n, \dots, Y_1] = \delta - \theta_1 \hat{\varepsilon}_n$$

حيث أن $\hat{\varepsilon}_n$ هي البواقي الحالية من الملاحظات الجارية. إن التنبؤ لـ m فترة مستقبلية يعطي:

$$\hat{Y}_n^{(m)} = E[Y_{n+m}/Y_n, \dots, Y_1] = E[\delta + \varepsilon_{n+m} - \theta_1 \varepsilon_{n+m-1}] = \delta$$

وبالتالي يكون أحسن تنبؤ هو وسط السلسلة δ ، $m > 1$ ، لأن السيرورة MA(1) لها ذاكرة بفترة واحدة فقط في المستقبل. فإن البيانات للسلسلة الحالية لا تساعدنا في الحصول على تنبؤات الفترات المستقبلية لما $m > 1$. ويعطي تباین خطأ التنبؤ لنموذج MA(1) في الفترة الأولى على النحو:

$$\text{var}(e_n^{(1)}) = E[(e_n^{(1)})^2] = \sigma_\varepsilon^2 = E[Y_{n+1} - \hat{Y}_n^{(1)}]^2$$

أما التباین الخاص بالفترة $m > 1$ فهو:

$$\begin{aligned} \text{var}(e_n^{(m)}) &= E[(e_n^{(m)})^2] = E[Y_{n+m} - \hat{Y}_n^{(m)}]^2 \\ &= E[(\varepsilon_{n+m} - \theta_1 \varepsilon_{n+m-1})^2] \\ &= (1 + \theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2 \dots (8.99) \end{aligned}$$

ومنه فإن تباین خطأ التنبؤ هو نفسه من أجل القيم $m=2,3,\dots$.

3-1-7-8 حساب التنبؤ للسيرورة ARMA(1,1)

ليكن نموذج ARMA(1,1) التالي:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots (8.100)$$

$$\phi(L)Y_t = \delta + \theta(L)\varepsilon_t$$

أي أن:

$$Y_t = \phi^{-1}(L)[\delta + \theta(L)\varepsilon_t] \dots (8.101)$$

حيث أن:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L$$

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L$$

$$\phi^{-1}(L) = 1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^3 + \dots$$

يمكن إعادة كتابة (8.101) على الشكل:

$$Y_t = \delta^* + \psi(L)\varepsilon_t \dots (8.102)$$

حيث أن:

$$\delta^* = \delta / (1 - \phi_1)$$

و $\psi(L)$ هي تأخير كثير الحدود المكون من الجداء

$\psi(L) = \phi^{-1}(L) \cdot \theta(L)$. إن $\phi^{-1}(L)$ تعطي كثير حدود لامتناهي، وبالتالي

فإن $\psi(L)$ هي كذلك تمثل كثير حدود لانهاضي. ولكن شرط الإستقرار يضمن لنا

بأن السلسلة $(1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots)$ سوف تتقارب. ويمكن في مثالنا

ARMA(1,1) أن نكتب:

$$\psi_1 = (\phi_1 - \theta_1)$$

$$\psi_2 = \phi_1(\phi_1 - \theta_1)$$

$$\psi_3 = \phi_1^2(\phi_1 - \theta_1)$$

⋮

$$\psi_n = \phi_1^n(\phi_1 - \theta_1)$$

وبمعرفة $|\phi_1| < 1$ ، ينتج أن ψ_n تتخفف كلما إرتفعت n ، وبالتالي فإن شرط الإستقرار يضمن أنه إذا كانت Y_1 معبر عنها كدالة للقيم الحالية والماضية للأخطاء ε ، كما في المعادلة (102.8)، فإن أهمية الترجيحات الأولية تكمن في أنها لا تتخفف كلما تتحرك للوراء عبر الزمن. وإذا كانت معالم السلسلة $ARMA(1,1)$ مقدرة فينتج:

$$Y_t = \hat{\delta} + \hat{\phi}_1 Y_{t-1} + \hat{\varepsilon}_t - \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} \dots (8.103)$$

إن المعادلتين، (88.8)، (90.8) تعبران عن قانون التنبؤ الأمثل بدلالة الأخطاء الحالية والماضية. لكن مبدأ أخذ التوقعات الشرطية يمكن أن يطبق مباشرة على الشكل الأصلي للنموذج من أجل الفترة $n+1$ والتي هي:

$$Y_{n+1} = \delta + \phi_1 Y_n + \varepsilon_{n+1} - \theta_1 \varepsilon_n$$

ثم إن $E(Y_n / Y_n, \dots, Y_1)$ وكذلك $E(\varepsilon_n / Y_n, \dots, Y_1)$ هو مساو لـ ε_n . أما العبارة $E(\varepsilon_{n+1} / Y_n, \dots, Y_1)$ فهي مساوية للصفر. ومنه فإن قانون التنبؤ الأمثل لـ Y_{n+1} هو:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_n^{(1)} &= E[\phi_1 Y_n + \delta + \varepsilon_{n+1} - \theta_1 \varepsilon_n] \\ &= \delta + \phi_1 Y_n + 0 - \theta_1 \hat{\varepsilon}_n - \phi_1 Y_n + \delta - \theta_1 \hat{\varepsilon}_n \end{aligned}$$

وعند حساب التنبؤ حاليا، فإن المعالم المجهولة والأخطاء، نعوضها بالقيم المقدرة. ومنه فإن قيمة التنبؤ المحسوبة تعطى بالعبارة:

$$\hat{Y}_n^{(1)} = \hat{\delta} + \hat{\phi}_1 Y_n - \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_n \dots (8.104)$$

ومن أجل التنبؤ بفترتين، نطبق عامل التوقع الشرطي لنجد:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_n^{(2)} &= E[\phi_1 Y_{n+1} + \delta + \varepsilon_{n+2} - \theta_1 \varepsilon_{n+1}] \\ &= \hat{\phi}_1 \hat{Y}_n^{(1)} + \delta = \phi_1^2 Y_n + (\phi_1 + 1)\delta - \phi_1 \theta_1 \hat{\varepsilon}_n \end{aligned}$$

ومنه فإن تعميم التنبؤ يكون تراجيعيا ويمكن أن يستمر إلى ما لا نهاية (ونلاحظ أن كل التنبؤات لنماذج $ARMA$ المستقرة سوف تتقارب إلى قيمة ثابتة. عند النقطة التي يصبح فيها التنبؤ غير ضروري) ومنه نقول، بالنسبة للفترة المستقبلية m يكون:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_n^{(m)} &= \phi_1 \hat{Y}_n^{(m-1)} + \delta \\ &= \phi_1^m Y_m + (\phi_1^{m-1} + \dots + \phi_1 + 1)\delta - \phi_1^{m-1} \theta_1 \hat{\varepsilon}_n \\ &= \phi_1^m Y_m + \delta \sum_{j=0}^{m-1} \phi_1^j - \phi_1^{m-1} \theta_1 \hat{\varepsilon}_n \dots (8.105)\end{aligned}$$

ونلاحظ أنه لما $m \rightarrow \infty$ فإن نهاية التنبؤ تؤول إلى وسط السلسلة على الشكل:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\hat{Y}_n^{(m)}) = \delta / (1 - \phi_1)$$

ومنه نستخلص بأن نماذج ARMA (أو ARIMA) تصلح بشكل أفضل للتنبؤات قصيرة المدى فقط. أما بالنسبة للتحليل طويل المدى فيفضل إستعمال نموذج قياسي هيكلي.

4-1-7-8 التنبؤ بالسيرورة AR(1,1,0)

لنعتبر السيرورة AR(1,1,0) على الشكل:

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \dots (8.106)$$

حيث أن:

$$w_t = (1 - L)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

يكون التنبؤ بفترة واحدة في المستقبل هو:

$$\hat{Y}_n^{(1)} = Y_n + \hat{w}_n^{(1)}$$

أما التنبؤ بالفترة $m > 1$ في المستقبل فهو:

$$\hat{Y}_n^{(m)} = Y_n + \hat{w}_n^{(1)} + \dots + \hat{w}_n^{(m)} \dots (8.107)$$

حيث أن:

$$\hat{W}_n^{(m)} = \phi_1^m W_n + \delta \sum_{j=0}^{m-1} \phi_1^j$$

والتي تعطي:

$$\hat{W}_n^{(m)} = \phi_1^m Y_n - \phi_1^m Y_{n-1} + \delta \sum_{j=0}^{m-1} \phi_1^j \dots (8.108)$$

ومنه فإن:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_n^{(1)} &= Y_n + \phi_1 (Y_n - Y_{n-1}) + \delta \\ &= (1 - \phi_1) Y_n - \phi_1 Y_{n-1} + \delta \dots (8.109) \end{aligned}$$

ثم إن التنبؤ بفترتين هو:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_n^{(2)} &= Y_n + \hat{W}_n^{(1)} + \hat{W}_n^{(2)} = \hat{Y}_n^{(1)} + \hat{W}_n^{(2)} \\ &= \hat{Y}_n^{(1)} + \phi_1^2 W_n + (\phi_1 + 1) \delta \\ &= (\phi_1^2 + \phi_1 + 1) Y_n - (\phi_1^2 + \phi_1) Y_{n-1} + (\phi_1 + 1) \delta + \delta \end{aligned}$$

لنستنتج أن:

$$\hat{Y}_n^{(m)} = \hat{Y}_n^{(m-1)} + \phi_1 \hat{W}_n^{(m-1)} + \delta \dots (8.110)$$

8-8 سلسلة تمارين حول الفصل الثامن

التمرين الأول:

لتكن لدينا السيرورة $ARMA(p,q)$ على الشكل:

$$\phi(L)Y_t = \delta + \theta(L)\varepsilon_t$$

(a) إذا كانت هذه السيرورة غير مستقرة ومتجانسة من المرتبة d ، فأوجد السيرورة المستقرة والمناسبة لهذا النموذج.

(b) إذا كانت $p=0$ و $q=3$ ، حدد دالة الارتباط الذاتي لهذه السيرورة الجديدة.

1 ارسم دالة الارتباط الذاتي لهذه السيرورة لما تكون هذه الأخيرة على الشكل:

$$Y_t = 1 + \varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-3}$$

(c) إذا كانت $p=0$ بين بأن دالة الارتباط الذاتي هي:

$$p_k = \begin{cases} 1: & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2} : & k = 1, 2, \dots, q \\ 0: & k > q \end{cases}$$

(d) لنفرض أن Y_t أعلاه هي سيرورة غير مستقرة ومتجانسة من المرتبة الأولى. وأن السلسلة المحولة $w_t = (1-L)Y_t$ يمكن تمثيلها بواسطة النموذج $ARMA(1,1)$ على الشكل:

$$w_t = 0.9w_{t-1} + \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1} + 1$$

وإذا كانت $Y_t = 0$ من أجل $t=0$ ، ماهي $E(Y_t)$ كدالة للزمن.

التمرين الثاني:

لنفرض أن سلسلة زمنية Y_t غير مستقرة ومتجانسة، يمكن نمذجتها كسيرورة عشوائية على الشكل $ARIMA(1,1,1)$.

(a) كيف يمكنك حساب دوال الارتباط الذاتي للعينة من أجل السلسلة الزمنية Y_t وفروقاتها؟ استعمل هذه الأخيرة لتتأكد من أن السيرورة $ARIMA(1,1,1)$ هي التخصيص المناسب لـ Y_t .

(b) لنفرض أنه ليس لديك جهاز كمبيوتر، يقوم بعملية التقدير غير الخطي. بين كيف يمكن استعمال إنحدار خطي على مقدرات تقريبية ومعقولة لمعالم النموذج أعلاه. اشرح الخطوات اللازمة بوضوح.

(c) إذا كانت السيرورة أعلاه مستقرة، $d=0$ ، وعلى الشكل $ARMA(2,1)$ مثل:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

اشتق دالة الارتباط الذاتي لهذه السيرورة بدلالة ϕ_1 ، ϕ_2 ، θ_1 . وأرسم هذه الدالة من أجل:

$$(i) \quad \phi_1 = 0.6, \quad \phi_2 = 0.3, \quad \theta_1 = 0.9$$

$$(ii) \quad \phi_1 = 0.6, \quad \phi_2 = 0.3, \quad \theta_1 = -0.9$$

$$(iii) \quad \phi_1 = 0.6, \quad \phi_2 = -0.3, \quad \theta_1 = -0.9$$

التمرين الثالث:

في السيرورة المستقرة $ARMA(1,1)$ على الشكل:

$$Y_t - \phi Y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

حيث أن:

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2, \quad E(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0 \quad s \neq t$$

(a) أوجد عبارات لكل من γ_0 ، γ_1 و γ_k ($k \geq 2$). ماذا يحدث للتباينات المشتركة الذاتية γ_k ($k \geq 1$) لما $\phi = \theta$ ؟

(b) إذا عرفنا دالة الارتباط الذاتي للسيرورة أعلاه على الشكل:

$$p_k = \frac{E(Y_t Y_{t-k})}{E(Y_t^2)}$$

فبين صحة العبارة:

$$p_k = \begin{cases} \frac{(\phi - \theta)(1 - \phi\theta)}{1 - 2\phi\theta + \theta^2} : k = 1 \\ \phi p_{k-1} : k \geq 2 \end{cases}$$

(c) بمعرفة قيمتي p_1 ، p_2 في الفرع (b) أعلاه، بين أن ϕ يمكن تحديدها ولكن يوجد حلين ممكنين للمعلمة θ .

التمرين الرابع:

في نموذج الإنحدار التالي:

$$Y_t = X_t' \beta + u_t : t = 1, 2, \dots, n$$

مع X_t غير عشوائية.

(a) نعتقد أن الأخطاء u_t تتبع نظام السيرورة $ARMA(p, q)$ مع p و q غير معروفين. وضح كيف يمكننا إختبار هذين العددين (المرتبتين) p و q باستعمال الارتباطات الذاتية.

(b) إذا كانت Y_t في نموذج أعلاه، تعتمد مباشرة على حد الأخطاء وتوزيع تأخيرها الموسمي على الشكل:

$$Y_t = \phi Y_{t-4} + \delta + u_t - \theta u_{t-1}$$

حيث أن:

$$E(u_t) = 0, \quad E(u_t^2) = \sigma_u^2, \quad E(u_t u_s) = 0 : s \neq t$$

و δ ثابت من أجل كل t .

بين بأن الارتباطات الذاتية للسلسلة الزمنية Y_t تحقق:

$$p_1 = -\theta/(1 - \theta^2)$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = \phi p_1$$

$$p_k = \phi p_{k-4} : k \geq 4$$

(c) عن طريق حل ϕ و θ بدلالة p_1, p_2, p_3 في الفرع (b) أعلاه، بين بأن ϕ يمكن دائما أن تحدد فرديا من الارتباطات الذاتية، بينما ذلك غير صحيح بالنسبة لـ θ .

التمرين الخامس:

ليكن نموذج السيرورة المستقرة $ARMA(p,q)$ للسلسلة الزمنية Y_t .

(a) اشتق عبارات لتنبؤات الفترات $\hat{Y}_n^{(1)}, \hat{Y}_n^{(2)}, \hat{Y}_n^{(3)}$ لما $p=0$ و $p=2$. ماهي تباينات الأخطاء لهذه التنبؤات. وماهو تباين خطأ التنبؤ لما $m>3$ ، حيث أن m هي فترة التنبؤ المستقبلي.

(b) أجب عن الأسئلة بالنسبة للسيرورة $AR(2)$

(c) أجب عن نفس الأسئلة بالنسبة للسيرورة $ARMA(2,1)$

(d) أجب عن نفس الأسئلة بالنسبة للسيرورة المفرقة $ARIMA(2,1,1)$.

الفصل التاسع:

مدخل لنظام معادلات خطية

مقدمة:

إن الارتباط الذاتي وعدم تجانس التباينات هي المشاكل الأساسية للإخطاء، والتي تؤثر على نماذج المعادلة الفردية. لكن إذا احتوى النموذج على أكثر من معادلة فإن تعقيدات إضافية نواجهها أثناء التقدير. ولنفرض أنه لدينا نموذجاً يحتوي على T معادلة خطية ومكتوبة على الشكل:

$$Y_i = X_i \beta_i + u_i; \quad i = 1, 2, \dots, T \dots (9.1)$$

$$E(u_i) = 0, \quad \text{var}(u_i) = \sigma_i^2 I_n$$

إن عدد المتغيرات المستقلة من أجل i بالمعادلة (1.9) يمثل بـ k_i

ويكون مجموع هذه المتغيرات هو $k^* = \sum_{i=1}^T k_i$. إن كل المتغيرات (أو المعالم)

في T معادلة لا تحتاج لأن تكون مرتبطة، لأن الارتباط مابين هذه المعادلات يكمن في حدود الأخطاء، والتي تكون مرتبطة عبر المعادلات المختلفة.

وبالنظر للمعادلة (1.9) تكون Y_i هي موجه ملاحظات $(n \times 1)$ في

المتغير التابع والخاص بالمعادلة i ، X_i هي $(n \times k_i)$ مصفوفة محددات للمعادلة i ، β_i هو $(k_i \times 1)$ موجه معالم i ، و u_i هو $(n \times 1)$ موجه أخطاء نفس المعادلة. إن تخصيص الخطأ بالشكل أعلاه يلغي الارتباط الذاتي أو عدم تجانس التباينات داخل كل معادلة. لكن تباين الأخطاء σ_i^2 ليس بالضرورة أن يكون نفسه عبر كل المعادلات. وبالرغم من أن الأخطاء ضمن كل معادلة تكون غير مرتبطة، فمن الممكن أن نحصل على إرتباطات مختلفة عن الصفر مابين الأخطاء

المناسبة للمعادلات المختلفة. فإذا فرضنا أنه من أجل موجهي الأخطاء المختلفين u_i, u_j لدينا:

$$\text{cov}(u_i, u_j) = \sigma_{ij} I_n \dots i, j = 1, 2, \dots, T \quad i \neq j \dots (9.2)$$

يمكن توضيح الأسباب الخاصة لظهور هذا الشكل (1). ومنه يستلزم أنه من أجل الملاحظة الخاصة بالعدد t فإن:

$$\text{cov}(u_{it}, u_{jt}) = \sigma_{ij} : t = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{cov}(u_{it}, u_{js}) = 0 \text{ فإن } s \neq t$$

هذا معناه أنه لا يوجد ارتباط عبر الزمن ولا يوجد ارتباط متقاطع عبر الزمن (أي لا يوجد ارتباط مابين أخطاء المعادلات المختلفة بالنسبة لمختلف أرقام الملاحظات). لكن إذا كانت σ_{ij} تختلف عن الصفر على الأقل بالنسبة لـ $i \neq j$ واحد فقط، فإنه يوجد ارتباط حديث *Contemporaneous Correlation*، والذي يعني ارتباط مابين الأخطاء المختلفة بالنسبة لنفس الملاحظة. إن وجود الارتباط الحديث للأخطاء يخلق ترابط "ضمني" مابين المعادلات في (1.9). ولهذا نستعمل مفهوم المعادلات الخطية غير المرتبطة ظاهرياً (SURE) والمعرفة من طرف Zellner⁽²⁾، لتوضيح نموذج يحتوي على المعادلتين (1.9) و (2.9). حيث يقترح Zellner بأنه يمكن ربح الكفاءة في التقدير إذا نظرنا إلى نظام (SURE) على أنه معادلة فردية واسعة. فتقدير هذه المعادلة الموسعة يكون كفواً باستعمال طريقة المربعات الصغرى المعممة (والمذكورة بالفصل السادس). ونصل إلى تقدير Zellner إذا أخذنا بعين الاعتبار أن خطأ المعادلات المتقاطعة لا يساوي الصفر.

1- أنظر:

Pindyck .R.S and Rubinfeld .D.L "Econometric Models and Econometric Forecasts", Mc-Craw-Hill International Book Compagny. London 1981, PP:331-352

2- أنظر:

A. Zellner "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias" Journal of the USA. Vol 57, 1963, PP:348-368.

ولكي نرى أثر ذلك، يمكن لنا أن نوفق كل المعادلات لتعطي شكلا يشبه نموذج المعادلة الفردية، ثم نستعمل الإقتراح المطور في حالة المعادلة الفردية. ويكون الشكل التوفيقى هو:

$$\text{var}(U) = E(UU') = E \begin{bmatrix} u_1 u_1' & u_1 u_2' & \dots & \dots & u_1 u_T' \\ u_2 u_1' & u_2 u_2' & \dots & \dots & u_2 u_T' \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ u_T u_1' & u_T u_2' & \dots & \dots & u_T u_T' \end{bmatrix}$$

$$= \phi = \begin{bmatrix} \sigma_{11} I_n & \sigma_{12} I_n & \dots & \dots & \sigma_{1T} I_n \\ \sigma_{21} I_n & \sigma_{22} I_n & \dots & \dots & \sigma_{2T} I_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{T1} I_n & \sigma_{T2} I_n & \dots & \dots & \sigma_{TT} I_n \end{bmatrix} \dots (9.5)$$

من العبارة (5.9) أعلاه، يمكن الملاحظة بأن $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ من أجل كل i و j . ومنه فإن المعادلة (4.9) لها أخطاء بوسط مساو للصفر، ومصفوفة تباين مشترك غير قطرية. مقترحة أن تطبيق قانون المربعات الصغرى العادية يعطي مقدرات غير متحيزة. لكنها غير كفوءة بمفهوم النظام الكامل للمعادلات (1.9). ومن أجل التقدير الكفوء، يجب استعمال المربعات الصغرى المعممة. حيث إذا فرضنا أن:

$$\text{var}(U) = \phi = \Sigma \otimes I_n \dots (9.6)$$

مع Σ مصفوفة متناظرة ومحددة موجبة، فإن مقدار المربعات الصغرى المعممة للنظام (4.9) هو:

$$\hat{\beta}_G = (X' \phi^{-1} X)^{-1} X' \phi^{-1} Y \dots (9.7)$$

$$= [X' (\Sigma^{-1} \otimes I_n) X]^{-1} X' (\Sigma^{-1} \otimes I_n) Y$$

ولدينا كذلك:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \dots & \dots & \sigma^{1T} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \sigma^{T1} & \sigma^{T2} & \dots & \dots & \sigma^{TT} \end{bmatrix}$$

مع مصفوفة التباين المشترك لمقدر المربعات الصغرى المعممة:

$$\text{var}(\hat{\beta}_G) = (X' \phi^{-1} X)^{-1} = [X'(\Sigma^{-1} \otimes I)X]^{-1} \dots (9.8)$$

إن الكتلة (i, j) للمصفوفة $X'(\Sigma^{-1} \otimes I)X$ هي $\sigma_{ij} X_i' X_j$ ، والكتلة i

$$\text{للمصفوفة } X'(\Sigma^{-1} \otimes I)Y \text{ هي } \sum_{i=1}^T \sigma_{ij} X_i' Y_j$$

عمليا، تعتمد عناصر المصفوفة ϕ على المعالم غير المعروفة σ_{ij} ،

$i, j = 1, 2, \dots, T$. إن طريقة المربعات الصغرى المعممة الممكنة Feasible هي تقدير كل معادلة على إنفراد بواسطة المربعات الصغرى العادية للحصول على موجّهات البواقي \hat{u}_i ، $i = 1, 2, \dots, T$ ، ومن ثم تقدير التباينات والتباينات المشتركة وغير المعروفة على الشكل:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= Y_i - X \hat{\beta}_i : i = 1, 2, \dots, T \\ &= M_i u_i : M_i = I - X_i (X_i' X_i)^{-1} X_i' \end{aligned}$$

ثم نقدر σ_{ij} بواسطة:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n} \hat{u}_i' \hat{u}_j : i, j = 1, 2, \dots, T \dots (9.9)$$

$$= \frac{1}{n} u_i' M_i M_j u_j \quad i \neq j$$

$$= \frac{1}{n} u_i' M_i u_i \quad i = j$$

ومنه فإن: $E(\hat{\sigma}_{ii}) \neq \sigma_{ii}$ وكذلك $E(\hat{\sigma}_{ij}) \neq \sigma_{ij}$. لكن يمكن القول بأن:

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\sigma}_{ij}) = p \lim \left(\frac{1}{n} \hat{u}_i' \hat{u}_j \right) : \hat{u}_i = Y - X \hat{\beta}_i$$

$$= p \lim \left(\frac{1}{n} u_i' M_i M_j u_j \right) : u_i = Y - X \beta_i$$

$$= \sigma_{ij}$$

$$p \lim (\hat{\beta}_i) = \beta_i \text{ لأن}$$

ومنه تكون $\hat{\Sigma}$ (المحتوية على $\frac{n(n+1)}{2}$ عناصر) المكونة بواسطة $\hat{\sigma}_{ij}$ المتسقة عبارة عن مصفوفة مقدرات متسقة لـ Σ . ومنه نطبق قانون المربعات الصغرى المعممة الممكن، مستعملين $\hat{\Sigma}$ عوضا عن Σ بالمعادلة (8.9) لنجد:

$$\hat{\beta}_{FG} = [X'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I)X]^{-1} X'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I)Y \dots (9.10)$$

حيث أن $\text{plim}(\hat{\beta}_{FG}) = \beta$ وهو مقدر Zellner لـ SURE. بالرغم من أنه يمكن إجراء تعديلات بالنسبة لدرجات الحرية هنا، سوف تصبح هذه الطريقة معقدة أكثر لما توجد أعداد مختلفة للمعالم في المعادلات المختلفة. وبالتالي تستعمل (9.9) عوضا عن المعادلة التي تعطي المقدر غير المتحيز:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{(N - k_i)^{1/2} \cdot (N - k_j)^{1/2}} \cdot \hat{u}_i' u_j \dots (9.11)$$

حيث عمليا لا يمكن القيام بذلك لأنه يمكن أن نصل إلى مصفوفة $\hat{\Sigma}$ غير محددة موجبة. ومنه فإن مقدر المربعات الصغرى المعممة الممكن يكون تقريبا متكافئا مع مقدر المربعات الصغرى المعممة النظري. حيث يكون هذا الأخير أفضل مقدر خطي غير متحيز (3).

في نموذج نظام معادلات خطية غير مرتبطة ظاهريا (SURE) توجد حالتان أين يختزل مقدر المربعات الصغرى المعممة إلى مقدر المربعات الصغرى العادية معادلة بمعادلة. إن الحالة الأولى هي أين لا يوجد ارتباط حديث، حيث أن $\sigma_{ij} = 0$ (أي Σ مصفوفة قطرية) من أجل $i \neq j$. أما الحالة الثانية فهي لما تكون المصفوفة القطرية X_i هي نفسها بالنسبة لكل المعادلات (أي $X_i = \bar{X}_0$). إن الحساب الجبري بالنسبة للحالة الثانية هو نسبيا مباشر أي:

3- أنظر: Stewart J. "Econometrics" Cambridge University Press, 1991 Page 175.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_G &= [X'(\Sigma^{-1} \otimes I)X]^{-1} X'(\Sigma^{-1} \otimes I)Y: X' = (I \otimes \bar{X}_0)' \\ &= [\Sigma^{-1} \otimes \bar{X}_0' \bar{X}_0]^{-1} (\Sigma^{-1} \otimes \bar{X}_0) Y \\ &= [\Sigma \otimes (\bar{X}_0' \bar{X}_0)^{-1}] (\Sigma^{-1} \otimes \bar{X}_0) Y \\ &= [I \otimes (\bar{X}_0' \bar{X}_0)^{-1} \bar{X}_0] Y \dots \dots (9.12)\end{aligned}$$

أما بالنسبة لمقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$ فنجد المعادلة (1.9) تصبح على الشكل:

$$\begin{aligned}Y_i &= \bar{X}_0 \beta_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, T \\ \hat{\beta}_1 &= (\bar{X}_0' \bar{X}_0)^{-1} \bar{X}_0' Y_1 \\ \hat{\beta}_2 &= (\bar{X}_0' \bar{X}_0)^{-1} \bar{X}_0' Y_2 \\ &\vdots \\ \hat{\beta}_T &= (\bar{X}_0' \bar{X}_0)^{-1} \bar{X}_0' Y_T\end{aligned} \quad = \begin{bmatrix} (\bar{X}_0' \bar{X}_0)^{-1} \bar{X}_0' & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & (\bar{X}_0' \bar{X}_0)^{-1} \bar{X}_0' & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (\bar{X}_0' \bar{X}_0)^{-1} \bar{X}_0' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix}$$

$$= [I \otimes (\bar{X}_0' \bar{X}_0)^{-1} \bar{X}_0'] Y$$

إن المعادلة (12.9) لا توضح لماذا لا يوجد ربح في الكفاءة عند تقدير النموذج ككل إنما تكون المحددات نفسها بالنسبة لكل المعادلات، حيث أن الجواب على ذلك يعتبر نوعا ما غامضا. فكما تعودنا من الفصل الرابع أن إستعمال القيود، في نموذج ما، على قيم المعالم سوف يؤدي إلى تخفيض تباينات المقدرات في مفهوم المعادلة الفردية، والتي هي غير مرتبطة مع بقية المعادلات، فإن الربح في الكفاءة ينتج من تقدير معالم تلك المعادلة. أما إذا وجدت معادلات أخرى لها بعض الارتباط مابين المعادلات، فإن القيود على معادلة واحدة يمكن أن تحسن كفاءة التقدير في معادلات أخرى بالنموذج. فإذا كانت كل المعادلات لها نفس المجموعة من المحدرات، فإن العلاقة مابين محدرات النموذج الكامل لا تسمح بوجود معادلة واحدة مقيدة أكثر من الأخرى. أما إذا كانت X_i مختلفة، فإنه توجد درجات مختلفة من القيد على المعادلات المختلفة. ويمكن اعتبار نموذج أنظمة المعادلات الخطية الموضحة بالمعادلتين (1.9) و (4.9) بالنموذج الخطي المتعدد **Multiple Linear Regression Model**.

9-2 طريقة المعقولية العظمى

في إستعمالنا لطريقة المعقولية العظمى، عند تقدير نموذج الإنحدار المتعدد بالمعادلة (4.9)، يمكن القول بأن التشابه ما بين $T=1$ (معادلة واحدة) والحالة العامة (عدة معادلات) يسمح لنا إعتبار ضياع عدة أشياء. الأولى هي إستعمال التوزيع المشترك في تعريف النموذج. إن المعادلة (1.9) يمكن النظر إليها على أنها السطر i للمعادلة (4.9). ومع الفرضيات:

$$E(u_i) = 0, \quad E(u_i u_j') = \begin{cases} \sigma_{ii} I_n & i = j \\ \sigma_{ij} I_n & i \neq j \end{cases} \dots\dots\dots (9.13)$$

نحتاج إلى تمثيل خاص لمجاميع كرونكر Kronecher. حيث أن إستعمال هذا التمثيل يمكننا من كتابة مصفوفة التوزيع U على الشكل:

$$Y \sim N[X\beta, \Sigma \otimes I_n] \dots\dots (9.14)$$

وذلك في ظل التوزيع الطبيعي للأخطاء مع $\text{var}(U) = \phi = \Sigma \otimes I_n$. كما أن $\Sigma \otimes I_n$ تمثل التباين المشترك لمصفوفة المتغيرات التابعة المعاد توجيهها Vectorised على الشكل:

$$\text{Vec}(Y) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix} : nT \times 1 \dots\dots (9.15)$$

إن عامل التوجيه $\text{Vec}(\cdot)$ يحول مصفوفة ما، إلى موجه عمود بواسطة ترتيب أعمدة المصفوفة واحدا بجانب الآخر. وبإستعمال هذا الأخير، يمكن التعبير عن (4.9) على النحو:

$$\text{Vec}(Y) = (I_T \otimes X) \text{Vec}(\beta) + \text{Vec}(U) \dots\dots (9.16)$$

أو في صيغة مبسطة أكثر:

$$\bar{Y} = \bar{X} \bar{\beta} + \bar{U} \dots\dots (9.17)$$

حيث أن:

$$\bar{Y} = \text{Vec}(Y) \quad , \quad \bar{X} = \text{Vec}(X) = (I_T \otimes X)$$

$$\bar{\beta} = \text{Vec}(\beta) \quad , \quad \bar{U} = \text{Vec}(U)$$

ثم يمكن كتابة النموذج الإحصائي المراد تقديره على الشكل:

$$\Pr(Y_t, \beta, \Sigma) = |\Sigma|^{1/2} (2\pi)^{-T/2} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} (Y - X\beta)' \Sigma^{-1} (Y - X\beta) \right] \dots (9.17)'$$

$$t = 1, 2, \dots, n$$

$$i = 1, 2, \dots, T$$

مع $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$ هي سلسلة عينية مستقلة ومسحوبة من $\Pr(Y_t, \beta, \Sigma)$ وكذلك $n \geq T + k^*$ حيث أن T هي عدد المعادلات، n حجم

العينة و k^* هي عدد معالم نموذج الانحدار المتعدد أي أن $k^* = \sum_{i=1}^T k_i$.

إن التخفيض أعلاه، في (17.9)، يكون غالبا متكافئا مع حالة $T=1$. حيث أن التغير الحقيقي، في حالة $T>1$ ، هو الزيادة في عدد المعالم المعنية بالتقدير وهي $T \times k + \frac{1}{2} T(T+1)$. ومنه سوف نوسع هذا التشابه في تحليلنا أثناء التقدير، الاختبار والتنبؤ. وبناءا على النموذج الإحصائي بالمعادلة (17.9) يمكن صياغة دالة المعقولية على الشكل:

$$L(Y, \beta, \Sigma) = \prod_{t=1}^n \Pr(Y_t, \beta, \Sigma)$$

$$\begin{aligned} \log L(Y, \beta, \Sigma) &= C - \frac{n}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (Y - X\beta)' \Sigma^{-1} (Y - X\beta) \\ &= C - \frac{1}{2} \left[n \log |\Sigma| + \text{trace} \left(\Sigma^{-1} (Y - X\beta)' (Y - X\beta) \right) \right] \dots (9.18) \end{aligned}$$

حيث أن C تمثل ثوابت. لتكون شروط الاشتقاق الجزئية الأولى للعبارة (18.9) بالنسبة لكل من β و Σ^{-1} على النحو:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = (X'Y - X'X\beta) \Sigma^{-1} = 0 \dots (9.19)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{n}{2} \Sigma - \frac{1}{2} (Y - X\beta)'(Y - X\beta) = 0 \dots (9.20)$$

ومنه تكون مقدرات المعقولية العظمى هي:

$$\tilde{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y = \hat{\beta} \dots (9.21)$$

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{n} \tilde{U}' \tilde{U} = \frac{1}{n} \hat{U}' \hat{U} \dots (9.22)$$

وبناء على نتيجة المعادلة (9.21) يمكن القول بأننا نصل إلى تقدير كل معادلة إنحدار منفردة بواسطة:

$$\tilde{\beta}_i = \hat{\beta}_i = (X'X)^{-1} X'Y_i; i = 1, 2, \dots, T \dots (9.23)$$

كما أن بواقى هذه الإتحادات المنفردة، $\tilde{u}_i = Y_i - X\tilde{\beta}_i$ ، يمكن استعمالها في اشتقاق المصفوفة Σ عبر العناصر:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n} \tilde{u}_i' \tilde{u}_j; i, j = 1, 2, \dots, T$$

وهذا ما يتشابه مع تقدير النموذج بواسطة المربعات الصغرى كما هو مبين بالعبارة (9.9). ويمكن اشتقاق مقياس لجودة التوفيق $R^2 = 1 - (\hat{U}'\hat{U})/(Y'Y)$ والخاص بنموذج الفصل الثالث (الجزء الأول) في صيغة مشابهة (بالتعمد ما بين $\tilde{Y} = X\tilde{\beta}$ و \tilde{U}) ولنعرف هذا المقياس على الشكل:

$$G = I - (\tilde{U}'\tilde{U})(Y'Y)^{-1} = [Y'Y - \tilde{U}'\tilde{U}](Y'Y)^{-1} \dots (9.24)$$

حيث أن المصفوفة G هي معامل التحديد المتعدد لنموذج الإنحدار الخطي المتعدد والمذكور بالمعادلة (4.9). كما أن G تتغير ما بين مصفوفة الوحدة (لما $\tilde{U} = 0$) والصفر (لما $\tilde{U} = Y$) أي أن $0 \leq G \leq I$. وبتوسيع مفهوم التعمد لحالة $T=1$ يمكن أن نصل إلى حالة:

$$\tilde{M}\tilde{U} = \tilde{M}U = \tilde{M}Y \dots (9.25)$$

حيث أن $\tilde{M} = X\tilde{\beta}$. ومنه فإن $\tilde{\beta}$ و $\tilde{\Sigma}$ هما مصفوفتان عشوائيتان مستقلتان:

$$\text{cov}(\tilde{\beta} \otimes \tilde{\Sigma}) = 0 \dots (9.26)$$

3-9 خصائص مقدرات المعقولية العظمى:

لمناقشة خصائص مقدرات المعقولية العظمى لنموذج الإنحدار الخطي المتعدد، دعنا نشق توزيعاتها حيث أن:

$$\tilde{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'U = \beta + AU \quad : \quad A = (X'X)^{-1}X'$$

لنجد أن:

$$\tilde{\beta} \sim N[\beta, \Sigma \otimes (X'X)^{-1}] \dots (9.27)$$

لأن $\tilde{\beta}$ هو دالة خطية لـ Y ، حيث أن:

$$Y \sim N[X\beta, \Sigma \otimes I]$$

ثم إن تغييرا بسيطا بالمعادلة (22.9) يجعلنا نكتب:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \frac{1}{n} [Y - X(X'X)^{-1}X'Y]' [Y - X(X'X)^{-1}X'Y] \\ &= \frac{1}{n} Y'[I - P_X]Y \end{aligned}$$

حيث أن $P_X = X(X'X)^{-1}X'$. لنكتب في الأخير:

$$n\tilde{\Sigma} = Y'[I - P_X]Y \dots (9.28)$$

ومنه فإن توزيع العبارة (28.9) هو مصفوفة متكافئة مع χ^2 المعروف على أنه توزيع (4) Whishart مع $(n-k)$ درجات حرية وتكتب على الشكل:

$$n\tilde{\Sigma} \sim W_n(\Sigma, T - k) \dots (9.29)$$

وفي حالة $T=1$ فإن $n\tilde{\Sigma} = \tilde{U}'\tilde{U}$ لتصبح $E(n\tilde{\Sigma}) = \sigma_u^2(n-k)$.

4- لتتعمق أكثر في خصائص توزيع Whishart، جداء Kronecker وإشتقاق المصفوفات يمكن النظر في: Spanos.A "Statistical Foundations of Econometric Modelling" Cambridge University Press. 1986. PP:602-604.

وكذلك $n\tilde{\Sigma} \sim \sigma_u^2 \chi_{(n-k)}^2$ حيث أن توزيع Wishart يحقق أغلب الخصائص المفضلة للتوزيع الطبيعي المتعدد. وبتشابه مع حالة $T=1$ يمكن أن نكتب:

$$E[(n\tilde{\Sigma})] = (n-k)\Sigma \dots (9.30)$$

وبالتالي فإن:

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{n-k} \tilde{U}' \tilde{U} \dots (9.31)$$

هو مقدر غير متحيز. وإنطلاقاً من المعادلة (21.9) حتى (30.9) يمكن القول بأن $\tilde{\beta}$ و $\tilde{\Sigma}$ هما مصفوفتي مقدرات المعقولة العظمى لـ β و Σ على الترتيب. تكون $\tilde{\beta}$ مصفوفة مقدرات غير متحيزة لـ β ، لكن $\tilde{\Sigma}$ مقدر متحيز لـ Σ . أما $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-k} \hat{U}' \hat{U}$ فهو مقدر غير متحيز لـ Σ . ويكون $\tilde{\beta}$ مقدرًا كامل الكفاءة لـ β . حيث أن مصفوفة المعلومات $\theta = (\beta, \Sigma)$ تأخذ الشكل:

$$I_n(\theta) = \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} \otimes X'X & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\Sigma^{-1} \otimes \Sigma^{-1}) \end{bmatrix} \dots (9.32)$$

وتحقق شروط متراجحة Cramer-Rao.

وإذا أردنا البحث في الخصائص التقاربية لمصفوفتي المقدرات $\tilde{\beta}$ و $\tilde{\Sigma}$ ، نقول أنه من نظرية التقدير بالمعقولة العظمى (بالفصل الخامس، الجزء الأول)

نعرف بأنه تحت الشروط النظامية فإن مقدر المعقولة العظمى $\tilde{\theta}$ لـ θ هو:

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta) \sim N(0, I^{-1}(\theta))$$

ومنه نقول إذا كانت لدينا $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-1} X'X) = Q$ غير شاذة، نستخلص بأن:

$$\sqrt{n}(\tilde{\beta} - \beta) \xrightarrow{A} N(0, \Sigma \otimes Q^{-1}) \dots (9.33)$$

$$\sqrt{n}(\tilde{\Sigma} - \Sigma) \xrightarrow{A} N(0, 2(\Sigma \otimes \Sigma)) \dots (9.34)$$

4-9 القيود الخطية:

يمكن صياغة الشكل العام للقيود الخطية المناسبة لنموذج الإنحدار الخطي المتعدد على الشكل:

$$D\beta + C = 0 \dots (9.35)$$

حيث أن:

$$D_{k \times k} = (D_1 : D_1^*)$$

$$C_{k \times T} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_1^* \end{pmatrix}$$

مع D_1^* هي $(k - P) \times k$ و C_1^* هي $(k - P) \times T$ وكذلك $\text{Rank}(D) = k$ ، $\text{Rank}(D_1^*) = k - P$.

إن الفرضية $\text{Rank}(D) = k$ تسمح لنا بحل المعادلة (35.9) من أجل β لنجد:

$$\beta = -D^{-1}C = G_1 C_1 + G_1^* C_1^* \dots (9.36)$$

حيث أن:

$$G = (G_1 : G_1^*) = -D^{-1}$$

وبتعويض هذه الأخيرة (36.9) في (4.9) من أجل $t=1,2,\dots,n$ نجد:

$$Y = X[G_1 C_1 + G_1^* C_1^*] + V$$

$$Y - XG_1 C_1 = XG_1^* C_1^* + V$$

$$Y^* = X^* C_1^* + V \dots (9.37)$$

حيث أن: $X^* = XG_1^*$ ، $Y^* = Y - XG_1 C_1$. وبتطبيق قانون التقدير

بالمعقولة العظمى على النموذج (37.9) نجد:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1' &= \left(X' X \right)^{-1} X' Y = \left[G_1' X' X G_1 \right]^{-1} G_1' X' [Y - X G_1 C_1] \\ &= \left[G_1' X' X G_1 \right]^{-1} G_1' X' X [\tilde{\beta} - G_1 C_1] \dots (9.38)\end{aligned}$$

وذلك بتعويض $Y = X\tilde{\beta} - \tilde{U}$. ومنه، من المعادلة (9.36) يكون مقدار المعقولية العظمى المقيد لـ β هو:

$$\tilde{\beta}_G = G_1 C_1 + G_1 \left[\left(G_1' X' X G_1 \right)^{-1} G_1' X' X (\tilde{\beta} - G_1 C_1) \right] \dots (9.39)$$

$$\tilde{\beta}_G = G_1 C_1 + H(\tilde{\beta} - G_1 C_1)$$

$$\tilde{\beta}_G = \tilde{\beta} - S(\tilde{\beta} - G_1 C_1) \dots (9.40)$$

حيث أن:

$$H = G_1' \left(G_1' X' X G_1 \right)^{-1} G_1' X' X$$

$$S = I - H$$

ومع معرفة أن $H.H=H$ وكذلك $S.S=S$ فإنه ينتج أن $H.S=0$ (أي أنهما متعامدين) نستنتج بأن S تأخذ الشكل:

$$S = (X' X)^{-1} D_1' \left[D_1 (X' X)^{-1} D_1' \right]^{-1} D_1 \dots (9.41)$$

وهذا يستلزم أن:

$$\tilde{\beta}_R = \tilde{\beta} - (X' X)^{-1} D_1' \left[D_1 (X' X)^{-1} D_1' \right]^{-1} \left[D_1 \tilde{\beta} + C_1 \right] \dots (9.42)$$

وذلك لأن: $D_1 G_1 = I$

ومنه يمكن إستنتاج مقدار المعقولية العظمى المقيد لـ \sum على النحو:

$$\tilde{\Sigma}_R = \frac{1}{n} \tilde{U}_R' \tilde{U}_R = \tilde{\Sigma} + \frac{1}{n} (\tilde{\beta}_R - \tilde{\beta})' (X' X) (\tilde{\beta}_R - \tilde{\beta}) \dots (9.43)$$

وهو توسيع مباشر لنتائجنا المحصلة بالفصل الخامس (الجزء الأول) في حالة المعادلة الفردية $T=1$.

9-5 اختبار القيود الخطية:

يكون الاختبار الإحصائي F ، في نموذج الإنحدار الخطي (حالة $T=1$) هو أحسن اختبار مستعمل في تحليلات التخصيص وخطأ التخصيص. ومنه نتساءل عن إمكانية توسيع هذا الاختبار لحالة نموذج الإنحدار الخطي المتعدد. أي أننا نهدف إلى اشتقاق الإحصاءة F الموسعة والتي تقوم بنفس الدور مثل الفصول السابقة. من أجل مقدري المعقولة العظمى $\tilde{\beta}$ و $\tilde{\Sigma}$ لدينا:

$$\tilde{\beta} \sim N(\beta, \Sigma \otimes (X'X)^{-1}) \dots (9.44)$$

$$n \tilde{\Sigma} \sim W_T(\Sigma, n - k) \dots (9.45)$$

وباستعمال هذه النتائج نستخلص بأنه، في حالة إنحدار معادلة واحدة من النظام، مثلاً المعادلة i ، فإن:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\beta}_i &= (X'X)^{-1} X'Y_i \\ \tilde{\sigma}_{ii} &= \frac{1}{n} \tilde{U}_i' \tilde{U}_i \\ U_i &= Y_i - X\tilde{\beta}_i \end{aligned} \right\} \dots (9.46)$$

وباستعمال خصائص التوزيع الطبيعي المتعدد وتوزيعات Whishart يمكن الإستخلاص بأن:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\beta}_i &\sim N(\beta_i, \sigma_{ii}(X'X)^{-1}) \\ n \left(\frac{\tilde{\sigma}_{ii}}{\sigma_{ii}} \right) &\sim \chi^2_{(n-k)} \end{aligned} \right\} \dots (9.47)$$

وفي حالة القيود الخطية المرتبطة مع β_i من الشكل $H_0: R_i \beta_i = r_i$ ضد الفرضية البديلة $H_A: R_i \beta_i \neq r_i$ (حيث أن R_i هي $P_i \times k$ ، r_i هي $P_i \times 1$) فإنه يمكن تطبيق الإحصاءة F المناسبة للمعادلة i على الشكل:

$$\frac{(R_i \tilde{\beta}_i - r_i)' [R_i (X'X)^{-1} R_i]^{-1} (R_i \tilde{\beta}_i - r_i) / P_i}{\tilde{U}'_i \tilde{U}'_i / (n - k)} \sim F_{P_i, n-k} \dots (9.48)$$

ولنعتبر الآن اشتقاق الاختبار المناسب للفرضية $H_0: D\beta - C = 0$ حيث أن D هي $p \times k$ و C هي $p \times T$ مع $\text{Rank}(D) = p$. إن مقدار المعقولة العظمى المقيد لـ β و Σ تحت H_0 صحيحة يأخذ الشكل:

$$\tilde{\beta}_R = \tilde{\beta} - (X'X)^{-1} D' [D(X'X)^{-1} D']^{-1} (D\tilde{\beta} - C) \dots (9.49)$$

$$\tilde{\Sigma}_R = \Sigma + \frac{1}{n} (\tilde{\beta}_R - \tilde{\beta})' X' X (\tilde{\beta}_R - \tilde{\beta}) \dots (9.50)$$

حيث أن: $\tilde{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$, $\tilde{\Sigma} = \frac{1}{n} \tilde{U}' \tilde{U}$, $\tilde{U} = Y - X\tilde{\beta}$ هي

مقدرات المعقولة العظمى غير المقيدة لـ β و Σ على الترتيب. وبإستعمال نفس الحجة (مثل حالة $T=1$) يكون إختبار H_0 معتمدا على المسافة:

$$\|D\tilde{\beta} - C\| \dots (9.51)$$

فكلما كانت هذه المسافة قريبة من الصفر، كلما كانت H_0 صحيحة. وإذا قمنا بتقييس Normalise هذه المسافة بواسطة تعريف مصفوفة الصيغة التربيعية:

$$\Sigma^{-1} (D\tilde{\beta} - C)' [D(X'X)^{-1} D']^{-1} (D\tilde{\beta} - C) \dots (9.52)$$

يكون التشابه واضحا مابين (52.9) و (48.9). وبناء على المساواة:

$$\tilde{U}'_R \tilde{U}_R = \tilde{U}' \tilde{U} + (D\tilde{\beta} - C)' [D(X'X)^{-1} D']^{-1} (D\tilde{\beta} - C) \dots (9.53)$$

وبإستعمال المعادلتين (48.9) و (52.9) يمكن إعادة كتابتها على الشكل:

$$\tilde{G} = [\tilde{U}'_R \tilde{U}_R - \tilde{U}' \tilde{U}] (\tilde{U}' \tilde{U})^{-1} \dots (9.54)$$

حيث أن: $\tilde{U}_R = Y - X\tilde{\beta}_R$

ومن المعادلة (53.9) يكون كذلك:

$$\tilde{U}'_R \tilde{U}_R - \tilde{U}' \tilde{U} = (D\tilde{\beta} - C)' [D(X'X)^{-1} D']^{-1} (D\tilde{\beta} - C) \sim W_T(\Sigma, P, \Delta) \dots (9.55)$$

حيث أن: $n \geq T + k$

$$\Delta = \Sigma^{-1} (D\beta - C)' [D(X'X)^{-1}D']^{-1} (D\beta - C) \dots (9.56)$$

هي المعلمة غير المركزية لتوزيع Wishart غير المركزي.
وذلك لأن:

$$(\tilde{U}'_R \tilde{U}_R - \tilde{U}'\tilde{U}) = U'M_D U \dots (9.57)$$

حيث أن:

$$M_D = X(X'X)^{-1}D'[D(X'X)^{-1}D']^{-1}D(X'X)^{-1}X' \dots (9.58)$$

مع العبارة:

$$\tilde{U}'\tilde{U} = U'M_X U \dots (9.59)$$

$$M_X = I - X(X'X)^{-1}X'$$

فإن M_X و M_D متعامدان ($M_D M_X = 0$) نستخلص بأن $U'M_X U$ و $U'M_D U$ موزعان إستقلاليا ونكتب:

$$\frac{(\tilde{U}'_R \tilde{U}_R - \tilde{U}'\tilde{U})/P}{\tilde{U}'\tilde{U}/(n-k)} \sim F_{P,n-k} \dots (9.60)$$

وهو الإختبار الموسع لحالة المعادلة (48.9) لما $H_0: R_i \beta_i = r_i$.

6-9 التنبؤ في ظل النموذج الخطي المتعدد:

بناء على الفرضية:

$$Y_t = \beta'X_t + u_t; t = 1, 2, \dots, n \dots (9.61)$$

فإن أفضل تنبؤ لـ Y_{n+m} بمعرفة الملاحظات $t = 1, 2, \dots, n$ قد إستعملت لتقدير β و Σ سوف يكون:

$$\hat{Y}_{n+m} = \hat{\beta}'X_{n+m}; m = 1, 2, \dots \dots (9.62)$$

حيث أن X_{n+m} تمثل القيمة الملاحظة للموجه X_t عند الملاحظة $t = n + m$. ويكون خطأ التنبؤ هو:

$$e_{n+m} = Y_{n+m} - \hat{Y}_{n+m} = (\hat{\beta} - \beta)' X_{n+m} + u_{n+m} : \dots\dots (9.63)$$

وإذا كانت e_{n+m} هي دالة خطية للمتغيرات العشوائية الموزعة طبيعياً فإن:

$$e_{n+m} \sim N[0, \Sigma(1 + X'_{n+m}(X'X)^{-1}X_{n+m})] \dots\dots (9.64)$$

وهي تعميم مباشر لتوزيع خطأ التنبؤ بالفصل الرابع (الجزء الأول). ومادام Σ تكون عادة غير معروفة فإن المقدّر غير المتحيّز هو:

$$W = \frac{1}{n-k} \hat{U}'\hat{U} \dots\dots (9.65)$$

نستعمل هذه النتيجة لتكوين الاختبار الإحصائي للتنبؤ:

$$J = (Y_{n+m} - \hat{Y}_{n+m})' W_F^{-1} (Y_{n+m} - \hat{Y}_{n+m}) \dots\dots (9.66)$$

حيث أن:

$$W_F = W(1 + X'_{n+m}(X'X)^{-1}X_{n+m}) \dots\dots (9.67)$$

ومنه نكون الاختبار الخاص بالتنبؤ:

$$J^* = \frac{(n-k-T+1).J}{(n-k).T} \sim F_{(T,n-k-T+1)} \dots\dots (9.68)$$

7-9 نموذج الإنحدار الخطي المتعدد الديناميكي:

لقد ناقشنا نموذج الإنحدار المتعدد في الفقرات السابقة، ومع ذلك كانت هذه النماذج ساكنة. حيث أن النظام الديناميكي يتميز بظهور المتغيرات التابعة والمؤخرة ضمن مجموعة المحدرات في بعض أو كل المعادلات، $i, \text{ حيث أن } i=1,2,\dots,T$. وهذا يطرح عدة مشاكل مثلما لاحظنا في نموذج المعادلة الفردية أو نموذج توزيع التأخير بالفصل السابع لما $T=1$. ومنه، عندما تكون $T>1$ ، يمكن صياغة نموذج الإنحدار الخطي المتعدد والديناميكي على الشكل:

$$Y_t = \sum_{i=1}^s A_i' Y_{t-i} + \sum_{i=1}^s B_i' X_{t-i} + u_t : t > s \dots\dots (9.69)$$

$$i = 0,1,\dots,s, \quad t = 1,2,\dots,n$$

وإذا كتبنا كثير الحدود التاليين:

$$A(L) = I - A'_1 L - \dots - A'_s L^s \dots (9.70)$$

$$B(L) = \beta'_0 + \beta'_1 L + \dots + \beta'_s L^s \dots (9.71)$$

فإنه يمكن إعادة صياغة النموذج (69.9) على النحو:

$$A(L)Y_t = B(L)X_t + u_t \dots (9.72)$$

ويكون النظام (72.9) أعلاه، مستقرا إذا كانت جذور كثير الحدود $|A(L)|$ تقع خارج دائرة الواحد. وإذا توفر هذا الشرط، فإن مصفوفة كثير الحدود $A(L)$ تكون غير شاذة. ومنه يمكن التعبير عن (72.9) على النحو:

$$Y_t = D(L)X_t + V_t \dots (9.73)$$

حيث أن $D(L)$ هي مصفوفة كثير الحدود اللانهائية في معامل التأخير المعروف بواسطة:

$$D(L) = A^{-1}(L).B(L) \dots (9.74)$$

$$V_t = A^{-1}(L).u_t \dots (9.75)$$

إذا كانت $A(L)=I$ مع $u_t \sim N(0, \Sigma)$ ، فإن تقدير المعادلة (69.9) أو المعادلة (72.9) يختزل إلى تطبيق مباشر لتقنية SURE والخاصة بـ Zellner. ثم إذا كانت كل معادلة من نظام المعادلات تحتوي نفس مجموعة المتغيرات المستقلة، فإن تطبيق المربعات الصغرى العادية على كل معادلة سوف يعطي مقدرات كاملة الكفاءة. وتظهر هذه الوضعية إذا لم نضع أية قيود على مصفوفة المعالم في المعادلة (69.9). إن إدخال عامل الارتباط عبر الزمن للأخطاء يعقد الأمور أكثر. حيث أن المشاكل التي تظهر هي تقريبا نفسها التي ناقشناها في حالة المعادلة الفردية بالفصل السابع. ومع هذا، فإذا استعملنا طريقة التقدير بالمعقولية العظمى فليس من الصعب أن تضمن الكفاءة التقاربية. ففي نموذج المعادلة الفردية، كانت النقاط الأساسية التي إهتمينا بها هي لما يكون عنصر الأخطاء من النوع $AR(1)$. ومنه إذا اعتبرنا:

$$X^* = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-s}, X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-s})$$

$$\beta^{*'} = (A_1', A_2', \dots, A_s', \beta_0', \beta_1', \dots, \beta_s')$$

مع العبارة $\text{Rank}(X^*) = k^*$ حيث أن:

$$k^* = T.k + ST(k-1) + ST^2$$

وبإتباع نفس خطوات التقدير بالفقرات السابقة للنموذج في شكله:

$$Y = X^* \beta^* + U \dots\dots\dots(9.76)$$

فإن مقدار المعقولية العظمى لـ β^* و Σ^* هو:

$$\tilde{\beta}^* = \left(X^{*'} X^* \right)^{-1} X^{*'} Y \dots\dots\dots(9.77)$$

$$\tilde{\Sigma}^* = \frac{1}{n} \tilde{U}^{*'} \tilde{U}^* \dots\dots\dots(9.78)$$

$$\tilde{U}^* = Y - X^* \tilde{\beta}^*$$

ويتصرف تقريبا مثل $\tilde{\beta}$ و $\tilde{\Sigma}$.

أما من أجل إجراء التحليل الميداني وتحقيق أهداف التنبؤ فمن المفيد إعادة النموذج (69.9) من أجل التعبير عنه في شكل إنحدار الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى AR(1)

$$Y_t^* = A_1^* Y_{t-1}^* + B_1^* Z_t^* + u_t^* \dots\dots\dots(9.79)$$

حيث أن:

$$Y_t^* = \begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-s+1} \end{bmatrix}, u_t^* = \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, A_1^* = \begin{bmatrix} A_1 & -I_T & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & 0 & I_T & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -I_T \\ A_s & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, B_1^* = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \end{bmatrix}, Z_t^* = \begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-s} \end{bmatrix}$$

ويمكن النظر إلى هذا انمشكل على أنه المرتبة الأولى لموجه غير متجانس لمعادلة الفروق والتي تصبح:

$$Y_t^* = \left(A_s^* \right)' Y_t^* + \sum_{i=1}^{t-1} \left(A_1^* \right)' . B_1^* Z_{t-i}^* + \sum_{i=1}^{t-1} \left(A_1^* \right)' . u_{t-i} \dots\dots\dots(9.80)$$

وبالتعويض المتواصل نصل إلى العبارة:

$$Y_t^* = \sum_1^{\infty} \left(A_1^* \right)^i \beta_1^* + \sum_{i=0}^{\infty} \left(A_1^* \right)^i u_{t-1} \dots (9.81)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(A_1^* \right)^t = 0 \text{ مع افتراض أن}$$

ويعرف هذا في أدبيات القياس الإقتصادي بإسم الشكل المختصر. وإذا كانت $M_0 = \beta_1^*$ تمثل المضاعف الفوري، فإن $M_1 = \beta_1^* A_1^*$ تمثل المضاعف الوسيط للتأخير 1. كما أن حل المعادلة (81.9) يقترح علينا كذلك مصفوفة مضاعف التوازن الطويل المدى والمعروف على الشكل:

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_1^* A_1^{*i} = \beta_1^* (I - A_1^*)^{-1} \dots (9.82)$$

أما بالنسبة للتنبؤ، فيمكن أن نلاحظ بأن التنبؤ الطبيعي لـ Y_{n+1} بمعرفة السلسلتين Y_1, \dots, Y_n وكذلك X_1, \dots, X_{n+1} هو:

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{A}_1^* Y_n + \hat{\beta}_1^* Z_{n+1}^* \dots (9.83)$$

وللتنبؤ بـ Y_{n+2} يجب أن نعرق X_{n+1}, X_{n+2} وكذلك Y_{n+1} ومنه:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n+2} &= \hat{A}_1^* Y_{n+1} + \hat{\beta}_1^* Z_{n+2}^* \\ &= \hat{A}_1^* \left[\hat{A}_1^* Y_n + \hat{\beta}_1^* Z_{n+1}^* \right] + \hat{\beta}_1^* Z_{n+2}^* \\ &= \left(\hat{A}_1^* \right)^2 Y_n + \hat{A}_1^* \hat{\beta}_1^* Z_{n+1}^* + \hat{\beta}_1^* Z_{n+2}^* \end{aligned}$$

ومنه فإن:

$$\hat{Y}_{n+l} = \left(\hat{A}_1^* \right)^l Y_n + \sum_{j=1}^l \left(\hat{A}_1^* \right)^{l-j} \hat{\beta}_1^* Z_{n+j}^* \dots (9.84)$$

$l = 1, 2, \dots$

8-9 سلسلة تمارين حول الفصل التاسع

التمرين الأول:

لنعتبر نظام المعادلتين التاليتين:

$$Y_{1t} = \beta_{11}X_{1t} + \beta_{21}X_{2t} + \beta_{31}X_{3t} + \beta_{41}X_{4t} + u_{1t}$$

$$Y_{2t} = \beta_{12}X_{1t} + \beta_{22}X_{2t} + \beta_{32}X_{3t} + \beta_{42}X_{4t} + u_{2t}$$

تحدث عن تقدير هذا النظام في ظل الحالات الثلاثة الآتية

(a) لا توجد قيود مسبقة على النظام.

$$\beta_{31} = \beta_{42} = 0 \quad (b)$$

$$\beta_{31} = \beta_{32} \quad (c)$$

(d) اشتق قانون التوزيع F لنختبر الفرضية $H_0: D\beta - c = 0$ بالنسبة للحالات المناسبة أعلاه.

التمرين الثاني:

لنعتبر نظام المعادلتين:

$$Y_{1t} = \alpha_1 Y_{1,t-1} + \beta_1 X_{1t} + u_{1t}$$

$$Y_{2t} = \alpha_2 Y_{2,t-1} + \alpha_2^* Y_{1,t-2} + \beta_2 X_{2t} + u_{2t}$$

(a) أكتب النموذج في الشكل $Y_t = Z_t \gamma + u_t$ مبينا مكونات Z_t و γ

(b) أكتب النموذج في الشكل $Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \beta X_t + u_t$

(c) أكتب النموذج في الشكل: $A(L)Y_t = B(L)X_t + u_t$

التمرين الثالث:

لنعتبر نظام المعادلات:

$$Y_t = AY_{t-1} + \beta X_t + u_t$$

إن التعويضات المتتالية للقيم المؤخرة لـ Y_t يعطي:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} A^j \beta X_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} A^j u_{t-j}$$

- (a) ماهو الشرط الضروري والكافي لأن يكون التمثيل أعلاه مقبولا .
- (b) إذا كان للمعادلة أعلاه حلا توازنيا عند $X_t = \bar{X}$ مع $\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I - A)^{-1}$ فبين بأن المصفوفة $(I - A)^{-1}\beta$ هي مصفوفة المضاعفات الكلية.

التمرين الرابع:

لنعتبر النظام التالي:

$$Y_t = AY_{t-1} + \beta_0 X_{1t} + \beta_1 X_{t-1} + u_t$$

أوجد عبارات لكل من:

- (a) مصفوفة المضاعفات الكلية.
- (b) مصفوفة المضاعفات الوسيطة بعد فترتين من الزمن.

التمرين الخامس:

من أجل نماذج الإنحدار غير المرتبطة:

$$Y_i = X_i \beta_i + u_i \quad : \quad i = 1, 2, \dots, n$$

مع X_i هي $T \times k_i$ وذات رتبة هي k_i مع الفرضيات:

$$E(u_i) = 0, \quad E(u_i u_j') = \sigma_{ij} I_T, \quad i, j = 1, \dots, n$$

وكذلك σ_{ij} غير معروفة.

- (a) بين بأن مقدر المربعات الصغرى المعممة يكون أكثر كفاءة بالمقارنة مع مقدر المربعات الصغرى العادية.
- (b) بين بأن مقدر المربعات الصغرى المعممة يختصر إلى مقدر المربعات الصغرى العادية لما:

$$(i) \quad \sigma_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

$$(ii) \quad X_i = \bar{X}_0, \quad i = 1, \dots, n$$

الملحق

ملحق A : جبر المصفوفات

* إن موجه عمود الوحدة هو ذلك الموجه الذي تكون كل عناصره هي الواحد.

$$i'_{(1m)} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$$

* نقول عن مصفوفة ما بأنها مستطيلة إذا كانت لها n سطر و m عمود. أي هي مصفوفة ذات أبعاد $(n \times m)$. إن المصفوفة $(n \times 1)$ هي موجه عمود ، والمصفوفة $(1 \times m)$ هي موجه سطر. أما إذا كانت المصفوفة ذات أبعاد $(n \times n)$ فتسمى بالمصفوفة المربعة . نكتب المصفوفة $A(n \times m)$ على الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

حيث أن العناصر a_{ij} تشير إلى الأسطر i و الأعمدة j التي تقع عليها

عناصر المصفوفة A .

* نقول عن مصفوفتين A, B بأنهما متساويتين إذا كان عدد الأسطر و الأعمدة

هو نفسه لدى المصفوفتين بالإضافة إلى أن $b_{ij} = a_{ij}$ من أجل كل i, j . إن العبارة

$B \neq A$ تستلزم أنه على الأقل هناك عنصر واحد من A يختلف عن العنصر

المقابل له بالمصفوفة B

* إن جمع و طرح المصفوفات يخضع للقاعدة التالية:

$$c = a \pm b \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

حيث إذا كانت A هي $(n \times m)$ فإن B يجب أن تكون كذلك $(n \times m)$ و c سوف

تكون $(n \times m)$.

• إن المصفوفة القطرية هي تلك المصفوفة المربعة و التي تكون العناصر خارج قطرها الرئيسي مساوية للصفر .

$$D_{n,n} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$$

• و إذا كانت كل عناصر القطر δ_{ij} متساوية ، تسمى مصفوفة سلمية . أما

المصفوفة المثلثية لأعلى فهي تلك المصفوفة المربعة بحيث أن كل عناصر القطر الرئيسي وفوقه تختلف عن الصفر و البقية تساوي الصفر . بينما المصفوفة المثلثية لأسفل عكس الأولى . و مثال عن المصفوفة المثلثية لأعلى نكتب :

$$T_{n,n} = t_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & i > j \\ \neq 0 & i \leq j \end{bmatrix} & i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

• إن المصفوفة المجزئة هي تلك المصفوفة المقسمة إلى مصفوفات جزئية على النحو :

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m - m_1 \end{matrix} \begin{matrix} n_1 & n - n_1 \end{matrix}$$

حيث أن A_{11} ، مثلا هي $m_1 \times n_1$ ، A_{12} هي $m_1(n-n_1)$ و غيرها ، هي مصفوفات مجزأة . أما مصفوفة الكتلة القطرية فيمكن تجزئتها بطريقة تجعل المصفوفات الجزئية المختلفة عن الصفر فقط هي التي تشكل القطر الرئيسي لمربع المصفوفات الجزئية أي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{qq} \end{bmatrix}$$

حيث أن كل q مصفوفات جزئية $[A_{11} \ A_{12} \ \dots \ A_{qq}]$ هي مصفوفات مربعة (لكن ليس بالضرورة من نفس الدرجة) ، و تشكل مصفوفة كتلة قطرية . إن الكتلة

المثلثية يمكن تجزئتها بطريقة تجعل العناصر المساوية للصفر فقط تقع وفوق القطر الرئيسي للمصفوفات الجزئية

ضرب المصفوفات:

إن ضرب المصفوفة بعدد سلمي يتضمن ضرب كل عناصرها بواسطة العدد السلمي
 $c = \lambda A \Rightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij}$

حيث λ عدد سلمي.

ومن خصائص الضرب بعدد سلمي نجد :

$$I) \quad \lambda A = A \lambda$$

$$II) \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$III) \quad (\lambda + K)A = \lambda A + KA$$

$$IV) \quad (\lambda K)A = \lambda KA$$

$$V) \quad (-1)A = -A$$

$$VI) \quad A + (-1)B = A - B$$

حيث λ عدد سلمي

إن ضرب مصفوفتين يتطلب بأن يكون عدد الأعمدة في مصفوفة اليسار مساو لعدد الأسطر في مصفوفة اليمين. إن الناتج من هذه العملية هو حسيلة ضرب عناصر السطر (بمصفوفة اليسار) بواسطة العناصر المناسبة لها من العمود (لمصفوفة اليمين) ثم جمع كل هذه الحسيلة. و منه نستنتج بأنه يتم الوصول إلى ضرب المصفوفات بتطبيق ضرب الموجهات. أي ضرب n عنصر لموجه سطر في n عنصر لموجه عمود.

و نكتب على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

أي نضرب $(1 \times n)$ موجه في $(n \times 1)$ موجه من أجل الحصول على عدد سلمي .
و إذا كتبنا:

$$C = A \cdot B \Rightarrow C_{ij} = \sum_h a_{ih} b_{hj}$$

حيث إذا كانت A هي $(n \times k)$ فإن B يجب أن تكون $(k \times m)$ و C سوف تكون $(n \times m)$.
يمكن لـ AB أن تكون موجودة ، لما تكون BA غير موجودة . وعادة نجد أن $BA \neq AB$ إلا في حالات خاصة.

و من خصائص ضرب المصفوفات نذكر:

$$I) A (B + C) = AB + AC$$

$$II) (A + B)C = AC + BC$$

$$III) A(BC) = (AB)C$$

$$IV) \lambda(AB) = A(\lambda B)$$

$$V) A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$$

$$VI) A \cdot I = I \cdot A = A$$

حيث I مصفوفة وحدة

$$VII) I \cdot I = I$$

نقول عن مصفوفة A أين الأسطر تصبح أعمدة و الأعمدة أسطر منقول A
و نرمز لها A' :

$$C = A' \Rightarrow C_{ij} = a_{ji}$$

فإذا كانت A من الدرجة $(n \times m)$ فإن C سوف تكون من الدرجة $(m \times n)$.
هناك بعض الموجهات الخاصة تجب الإشارة إليها مثل الموجه المعلوم أو موجه الصفر و الذي تكون كل عناصره مساوية للصفر .

ثم موجه الوحدة و المكتوب I_i حيث له العنصر i مساوي للواحد . أما بقية العناصر معدومة و هناك موجه الجمع الذي تحتوي كل عناصره على الواحد مثلما أشرنا لذلك في بداية الملحق.

* إذا حققت A الشرط $A = A'$ نقول بأنها مصفوفة متناظرة.

* إن أثر المصفوفة المربعة ذات الدرجة n هو حاصل جمع n عنصر لقطرها الرئيسي

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

و من خصائص أثر المصفوفة نذكر:

$$\text{I) } \text{trace}(I) = n, \text{trace}(0) = 0$$

$$\text{II) } \text{trace}(A') = \text{trace}(A)$$

$$\text{III) } \text{trace}(AA') = \text{trace}(A'A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

$$\text{IV) } \text{trace}(\lambda A) = \lambda \text{trace}(A)$$

$$\text{V) } \text{trace}(A + B) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B)$$

$$\text{VI) } \text{trace}(A.B) = \text{trace}(BA)$$

BA, AB موجودة

$$\text{VII) } \text{trace}(ABC) = \text{trace}(CBA) = \text{trace}(CAB)$$

CAB, BCA, ABC موجودة

$$\text{VIII) } \text{trace}(A \times B) = \text{trace}(A) \times \text{trace}(B)$$

حيث (x) تشير إلى جداء Kroneker.

رتبة المصفوفة :

إن رتبة العمود لمصفوفة A هي أكبر عدد للأعمدة المستقلة خطيا. و رتبة السطر هي العدد الأكبر للأسطر المستقلة خطيا. و ما دام رتبة العمود هي نفسها رتبة السطر فنشير مباشرة إلى رتبة المصفوفة و نكتب $\text{Rank}(A)$ ، و يمكن في بعض الأحيان إيجاد رتبة المصفوفة عن طريق البحث ، أو ما يسمى إستعمال عمليات الحذف ، أو الإختزال لتقليص المصفوفة إلى شكل تكون فيه الرتبة موجودة بالبحث و إن إستعملنا عمليات حذف السطر : مثلا ، فهناك 3 عمليات حذف (إختزال) يمكن إجراؤها على أسطر المصفوفة و هي :

(1) مبادلة سطرين ، أي a_{ij} تبادله مع a_{hj} ، $j=1,2,3,\dots,m$ ، $h \neq i$

(2) ضرب سطر بواسطة عدد سلمي ، أي a_{ij} تعوض بواسطة λa_{ij} حيث أن λ

عدد سلمي scalar ، $j=1,2,\dots,m$

(3) تعويض سطر بواسطة مجموع ذلك السطر ثم سطر آخر بعدد سلمي λ أي a_{ij}
تعوض بواسطة:

$$a_{ij} = \lambda a_{hj}$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

$$h \neq i$$

كما يمكن استعمال المصفوفة السلمية ، $(^1)$ echelon matrix والتي لها الخاصية أن
العنصر الأول المختلف عن الصفر في كل سطر يكون مساويا للواحد . و يكون هذا
الأخير موجودا على الأقل في موضع اليمين من العنصر الأول المختلف عن الصفر
للسطر السابق .

كما أنه في المصفوفة السلمية ، تكون الرتبة مساوية لعدد الأسطر المختلفة عن
الصفر والتي نعني بها عدد الأسطر المحتوية على الأقل على عنصر واحد مختلف
عن الصفر . و كمثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن هذه المصفوفة تحتوي على أربعة موجهات سطر . كل واحد منها له أبعاد
(1x4) و آخر سطر هو موجه الصفر . إن أية مجموعة موجهات محتوية على موجه
الصفر ، تكون تابعة² ، ومنه فإن الأسطر الأربعة للمصفوفة H تكون تابعة خطيا
بينما الأسطر الثلاثة الأولى تكون مستقلة خطيا أي أن $\text{Rank} (H) = 3$

¹ مصفوفة سلمية تسمى كذلك مصفوفة مدرجة
² تابعة : مرتبطة .

- و هناك الإختصار لشكل المصفوفة السلمية، Echelon Form حيث يمكن لأية مصفوفة أن تختصر للشكل السلمي بإستعمال عمليات حذف على الأسطر و التي تغير من الرتبة. فإذا إستعملنا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 8 & 15 \end{bmatrix}$$

يمكن إختصارها إلى المصفوفة H المعطاة أعلاه ، بحيث أن $\text{Rank}(A) = 3$ كما يلي :

$$H = E A$$

حيث أن E هو جداء مصفوفات الإختزال (الأولية) المستعملة للوصول إلى تخفيض الشكل السلمي . و منه نجد:

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(EA) = \text{Rank}(H)$$

- و من قواعد الرتبة نذكر:

(1) إذا كانت A هي مصفوفة $(n \times m)$ فإن:

$$\text{Rank}(A) \leq \min(n, m)$$

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A')$$

(2) إذا كانت A هي $(n \times n)$ و A^{-1} موجودة فإن:

$$\text{Rank}(A^{-1}) = \text{Rank}(A)$$

(3) إذا كانت $\text{Rank}(A) = m = n$ مع A هي $(m \times n)$ فإن A تكون غير شاذة و لها معكوس وحيد هو A^{-1}

(4) إذا كانت A هي $(n \times k)$ و B هي $(k \times m)$ فإن :

$$\text{Rank}(AB) = \min [\text{Rank}(A), \text{Rank}(B)]$$

(5) إذا كانت A هي $(n \times n)$ غير شاذة و B هي $(n \times m)$ فإن:

$$\text{Rank}(AB) = \text{Rank}(B)$$

(6) إذا كانت A هي $(m \times n)$ غير شاذة ، و B هي $(n \times m)$ فإن :

$$\text{Rank}(BA) = \text{Rank}(B)$$

(7) إذا كانت A و B مصفوفتين غير شاذتين و رتبتيهما هما m و n على الترتيب فإن:

$$\text{Rank}(AB) = \text{Rank}(BA)$$

$$\text{Rank}(AA') = \text{Rank}(A'A) = \text{Rank}(A)$$

(8)

التبعية الخطية و الإستقلال الخطي:

إذا كانت a_1, a_2, \dots, a_m هي موجهات $(n \times 1)$ ، و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ هي أعداد سلمية، فإن $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ تسمى تشكيلة خطية لـ a_i ، $i = 1, 2, \dots, m$. و منه فإن التشكيلة الخطية لـ $(n \times 1)$ موجهات يجب أن تعرف $(n \times 1)$ موجه آخر . فمثلا يمكن أن نعتبر التشكيلة الخطية التالية:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$$

و إذا كانت الطريقة الوحيدة لجعل $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$ هي وضع كل λ_i مساوية للصفر ، فإن a_1, a_2, \dots, a_m تكون مستقلة خطيا . أما إذا كانت التشكيلة $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$ و لكن على الأقل هناك λ_i واحد يختلف عن الصفر ، فنقول أن a_1, a_2, \dots, a_m تابعة خطيا .

إن الفكرة الأساسية حول التبعية الخطية لمجموعة موجهات هي أن تكون هناك إمكانية التعبير ، على الأقل ، عن موجه واحد كتشكيلة خطية لبقية الموجهات في المجموعة . حيث لنفرض أن $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$ مع $\lambda_i \neq 0$ ثم يكون:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$$

$$\lambda_1 a_1 = -\lambda_2 a_2 - \dots - \lambda_m a_m$$

$$a_1 = -\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)a_2 - \dots - \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)a_m$$

أما إذا كانت مجموعة من الموجهات مستقلة خطيا ، فإن العبارة $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$

تستلزم بأن كل القيم λ_i ، $i = 1, 2, \dots, m$ ، تكون مساوية للصفر ، و ليس من

الممكن التعبير عن أي من الموجهات كتشكيلة خطية لبقية الموجهات في المجموعة المذكورة.

و من خصائص التبعية و الإستقلال الخطيين نذكر:

(1) أية مجموعة جزئية من مجموعة موجهات مستقلة خطيا هي كذلك مستقلة خطيا.

(2) أية مجموعة موجهات محتوية على مجموعة جزئية تابعة خطيا تكون نفسها تابعة خطيا.

(3) إن مجموعة الموجهات m ، أين كل واحد له n عنصر ، تكون تابعة خطيا لما تكون $m > n$.

(4) أية مجموعة موجهات محتوية على الموجه الصفري ، تكون تابعة خطيا.

(5) إن مجموعة n عنصر للموجهات n المستقلة خطيا تشكل أساس مجموعة لكل n موجه ممكن أي أن أي n عنصر موجه يمكن التعبير عنه كتشكيلة خطية للموجهات المكونة للأساس.

(6) إن إختيار موجهات الأساس لا يكون وحيدا ، بينما تمثيل أي موجه بدلالة أي أساس معطى مسبقا يكون وحيدا.

المحددات :

إن محدد المصفوفة A ($n \times n$) يكتب على الشكل :

$$\text{Det}(A) = |A| = \sum_{i=1}^n (-1)^P a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

حيث أن الجمع مأخوذ عبر كل التباديل الممكنة للرمز الثاني j ، و المطلوب من أجل الحصول على تبديل خاص حيث إذا كانت ، مثلا ، A هي 2×2 فإن:

$$\text{Det}(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

و من خصائص المحددات نذكر:

(1) يعرف $\text{Det}(A)$ فقط لما تكون المصفوفة A مربعة .

(2) لدينا $\text{Det}(A) = \text{Det}(A')$ حتى عندما تكون A غير متناظرة .

- (3) إذا كان B محصل من A بواسطة تبادل أي سطرين (أو عمودين) للمصفوفة A فإن $\text{Det}(B) = -\text{Det}(A)$
- (4) إذا كانت مصفوفة ما لها سطرين (عمودين) متماثلين أو أكثر ، فإن محددها يكون معدوما.
- (5) إذا كانت B مكونة من A بواسطة إضافة مضاعف سطر (عمود) سطر آخر (عمود آخر) فإن قيمة المحدد تبقى نفسها.
- (6) إذا كانت أسطر (أعمدة) المصفوفة A تابعة خطيا فإن $\text{Det}(A)=0$ ، و إذا كانت مستقلة خطيا فإن $\text{Det}(A) \neq 0$
- (7) إن محدد المصفوفة المثلثية يساوي إلى حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي .
- (8) إن ضرب أي سطر (عمود) لمصفوفة ما (A) بواسطة العدد السلمي λ سوف يضاعف المحدد بواسطة λ . أما ضرب كل عناصر المصفوفة بواسطة λ فسوف يضاعف المحدد بواسطة λ^n .
- $\det(A) = |A| = \det(A') = (-1)^n \cdot \det(-A) = (\lambda^{-n}) \det(\lambda \cdot A)$
- (9) إن محدد ضرب مصفوفتين هو حاصل ضرب محددتي المصفوفتين :
- $\det(AB) = |AB| = \det(A) \cdot \det(B)$
- (10) إن محدد مصفوفة الوحدة هو الواحد ، و محدد مصفوفة الصفر هو صفر.
- (11) إذا كانت $\text{Det}(A)=0$ فإن A هي مصفوفة شاذة و العكس صحيح.
- (12) إذا كانت A مصفوفة غير شاذة ، فإن $\text{Det}(A)^{-1} = [\text{Det}(A)]^{-1}$
- (13) إذا كانت A مصفوفة متعامدة فإن : $\text{Det}(A) = \pm 1$
- (14) إذا كانت A و B مصفوفتان مربعتان من الدرجة n و m على الترتيب فإن :
- $\det(A \otimes B) = [\det(A)]^n \cdot [\det(B)]^m$

معكوس المصفوفة :

إذا كانت A هي مصفوفة $(n \times n)$ غير شاذة ، فإن المعكوس الوحيد لها هو A^{-1} من المرتبة n بحيث تحقق :

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

و يمكن التعبير عن شرط المعكوس بعدة صيغ هي :

- (1) المصفوفة A غير شاذة .
 - (2) المصفوفة A لها رتبة n , $\text{Rank}(A) = n$.
 - (3) المصفوفة A لها n سطر مستقل خطيا .
 - (4) المصفوفة A لها n عمود مستقل خطيا .
- و نحسب معكوس المصفوفة A على الشكل:

$$A^{-1} = (C_{ij}) / A = \left[(-1)^{i+j} M_{ji} \right] / |A|$$

حيث أن C_{ij} هي مصفوفة المعاملات المساعدة و منقولها يسمى بالمصفوفة المساعدة أما M_{ji} فهي المحددات المصغرة.

و لدراسة شكل معكوس مصفوفة ما دعنا نبدأ بمصفوفة ذات أبعاد 2×2 نكتب :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

إن تعريف المعكوس يعطى بالمعادلة التالية:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث أن حل هذه المعادلات يعطي:

$$\alpha_{11} = \frac{a_{22}}{[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}]} = \frac{a_{22}}{|A|}$$

$$\alpha_{21} = -a_{21}/|A|$$

$$\alpha_{12} = -a_{12}/|A|$$

$$\alpha_{22} = a_{11}/|A|$$

و منه فإن المعكوس هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

فإذا أخذنا :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

فإن :

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

من خصائص معكوس المصفوفة نذكر

$$I = I^{-1} \quad (1)$$

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (A')^{-1} = (A^{-1})', \quad |A^{-1}| = |A|^{-1} \quad (2)$$

(3) إذا كانت A و B مصفوفتين غير شاذتين و من نفس المرتبة فإن :

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$|A|^{-1} = 1/|A| \quad (4)$$

(5) إن معكوس المصفوفة المثلثية العليا (السفلى) هو كذلك مصفوفة مثلثية عليا (سفلى).

(6) إذا كانت A مصفوفة متعامدة فإن $A^{-1} = A'$ و بالتالي فإن A^{-1} و A' متعامدين كذلك

(7) إذا كانت A غير شاذة و متناظرة فإن A^{-1} هي كذلك.

(8) إن معكوس مصفوفة الكتلة القطرية هو عبارة عن مصفوفة كتلة قطرية كذلك ويساوي إلى معكوس المصفوفات الموجودة بالقطر.

(9) إذا كانت A مصفوفة مربعة غير سالبة فإن $(I-A)$ يكون لها معكوس غير سالب إذا و فقط إذا كانت كل مكوناتها الرئيسية موجبة و نكتب :

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots$$

(10) إن معكوس المصفوفة المجزأة :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

حيث A_{11}, A_{22} هما مصفوفتين جزئيتين غير شاذتين، هو :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} & A_{22}^{-1}(I + A_{21}B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A.1)$$

حيث أن $B_{11} = [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]^{-1}$ أو بالمقابل :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}(I + A_{12}B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}) & -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} \\ -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} & B_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A.2)$$

- و نحصل على الصيغتين (A.1) و (A.2) أعلاه من العلاقة :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A.3)$$

حيث أن المصفوفات الجزئية B_{ij} لها نفس أبعاد المصفوفات الجزئية A_{ij} و بالضرب نجد:

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0 \\ A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A.4)$$

- إن المعادلة الثالثة أعلاه تعطي :

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} \dots\dots\dots (A.5).$$

و بتعويض (A.5) بالمعادلة الأولى للمجموعة (A.4) نجد:

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} \dots\dots(A.6)$$

و نفس الشيء بالنسبة للمعادلة الثانية نجد:

$$B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} B_{22} \dots\dots(A.7)$$

ثم نعوض (A.7) بالمعادلة الرابعة للمجموعة (A.4) نجد:

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \dots\dots\dots (A.8)$$

إن المعادلات (العبارات) الأربعة أعلاه ، (A.8) ، (A.7) ، (A.6) ، (A.5) تكون العمودين الأول والثاني ، على الترتيب ، للصيغتين (A.1) و (A.2) أعلاه وهما صيغتان بديلتان للمعكوس A^{-1} .

و لاشتقاق بقية الأعمدة في الصيغتين (A.1) (A.2) ، نضرب دائما $A = I$. A^{-1} لنجد

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} = I \\ B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} = 0 \\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I \end{bmatrix} \dots\dots\dots(A.9)$$

و تعطي المعادلة الثانية للمجموعة (A.9) ما يلي:

$$B_{12} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \dots\dots\dots (A10)$$

لنعوض (A.10) و (A.5) في المعادلة الرابعة للمجموعة (A.9) ثم نحل من أجل B_{22} فنجد:

$$B_{22} = A_{22}^{-1} [I + A_{21} B_{11} A_{12} A_{22}^{-1}] \dots\dots\dots(A.11)$$

إن العبارتين (A.10) و (A.11) تكمّلان العمود الثاني لتعريف A^{-1} بالمعادلة (A.1) أما المعادلة الثالثة للمجموعة (A.9) ، و المعادلة الأولى للمجموعة (A.4) تعطيان العبارتين:

$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} \dots\dots\dots(A.12)$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} [I + A_{12} B_{22} A_{21} A_{11}^{-1}] \dots\dots\dots(A.13)$$

و اللتين تكمّلان العمود الأول لتعريف A^{-1} بالمعادلة (A.2)

(12) محددات المصفوقات المجزأة.

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = b_i, i=1,2,\dots,n \dots \dots \dots (A.15)$$

و يمكن لنظام المعادلات الخطية (A.15) أن يكون له :

(1) حلا وحيدا .

(2) عدة حلول .

(3) بدون حل.

و لاتخاذ قرار حول إمكانية وجود حل للنظام أعلاه ، ثم إن وجد حل لذلك ، فهل هو الحل الوحيد ؟ و للإجابة عن ذلك نقول أنه يمكن إختزال المصفوفة A مثلا إلى شكل كما يلي:

$$\begin{aligned} EAX &= Eb \\ HX &= h \end{aligned}$$

حيث أن E هو جداء المصفوفات الأولية (المختزلة) المطلوبة لتخفيض A إلى الشكل السلمي ، H هي المصفوفة السلمية المحصلة من العبارة ، $H=EA$ أما h فهو الموجه المحصل من تطبيق عمليات السطر على b. و منه يوجد حل للنظام أعلاه إذا و فقط إذا كانت:

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A:b) = \Gamma$$

و يكون هذا الحل وحيدا إذا و فقط إذا كانت $\Gamma = m$ ، و إذا وجد حل مع ، $\Gamma < m$ فإنه هناك $m - \Gamma$ من المتغيرات يمكن تعيينها كمتغيرات إختيارية وبقية المتغيرات Γ تكون محددة للحل الوحيد.

أما إذا كان عدد المعادلات n يساوي عدد المجاهيل ، و المعادلات مستقلة بحيث أن:

$$\text{Rank}(A)=m=n$$

فإن الحل يكون وحيدا . و نحصل على الحل في هذه الحالة كما يلي:

$$X = A^{-1} b$$

و كذلك من قاعدة cramer على الشكل :

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} \quad j = 1,2,\dots,n \quad \dots \dots (A.16)$$

حيث أن A_j نحصل عليها من المصفوفة A بتعويض العمود j للمصفوفة A بواسطة b.

و توجد حلول غير وحيدة في الحالة المتجانسة³، حيث أن موجه الثوابت يكون صفرا و في هذه الحالة يكون الشرط الضروري و الكافي هو:

$$b=0, \text{ Rank } (A) = \Gamma < m$$

و لا توجد حلول للنظام المذكور إذا كانت

$$\text{Rank } (A) < \text{Rank } (A : b)$$

و نشرح ذلك نأخذ مجموعة المعادلات :

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7$$

$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 15$$

و لكي نكون الشكل السلمي نضع:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & :3 \\ 1 & 2 & 2 & :4 \\ 2 & 3 & 4 & :7 \\ 4 & 6 & 8 & :15 \end{bmatrix}$$

$$[Hh] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & :3 \\ 0 & 1 & 0 & :1 \\ 0 & 0 & 0 & :1 \\ 0 & 0 & 0 & :0 \end{bmatrix}$$

و تقرأ المعادلة الثالثة في المجموعة $Hx=h$ كما يلي:

$$0.x_1 + 0.x_2 + 0x_3 = 1 \Rightarrow 0 = 1$$

و هو مستحيل

و منه فإن الإختزال إلى الشكل السلمي يبين بأن لا حل موجود. أما إذا طبقنا نفس الشيء على المعادلة الأخيرة و المحولة إلى:

$$4.x_1 + 6.x_2 + 8x_3 = 15$$

³ - الجملة المتجانسة تقبل حلا دائما .

فإن الجواب يختلف تماما. ففي هذه الحالة تكون [Hh] لها سطرين من الأصفار و التي تستلزم أنها معادلات غير ضرورية و يكون السطرين الأولين فقط بديلين للحل ، حيث أن هذين السطرين يتناسبان مع المعادلتين:

$$1x_1 + 1.x_2 + 2x_3 = 3$$

$$0.x_1 + 1.x_2 + 0x_3 = 1$$

و الحل هو $x_1 = 2, x_3 = 0, x_2 = 1$ لكن هذا الحل ليس وحيدا، بل هناك إمكانية حل أخرى و هي: $x_1 = 0, x_3 = 1, x_2 = 1$.

المصفوفات الخاملة

إن أية مصفوفة مربعة A ، و التي تحقق الشرط $A^2 = A$ تسمى مصفوفة خاملة . في هذا الكتاب ، كل المصفوفات الخاملة التي تطرقنا لها هي مصفوفات متناظرة أي $A.A=A'=A$ و أبسط مثال عن المصفوفات الخاملة هو مصفوفة الوحدة و كذلك المصفوفة:

$$A = I - \left(\frac{1}{n} \right) ii' = I - (i'i)^{-1} i' \dots \dots \dots (A.17)$$

حيث أن I هي مصفوفة الوحدة ، و i هو موجه عمود يحتوي على n عنصر من الواحد، و تلعب المصفوفة (A.17) دورا كبيرا لما نحول ملاحظات المتغيرات إلى الشكل الإنحرافي أو إنحراف المتغيرات عن وسطها (أنظر الفصل الثالث) . وتكون الجذور المميزة للمصفوفة الخاملة إما الواحد أو الصفر. كما أن رتبة المصفوفة الخاملة تساوي إلى مجموع جذورها المميزة و نفس الشيء بالنسبة لآثر المصفوفة الخاملة التي تساوي كذلك لمجموع جذورها المميزة . و منه نقول إذا كانت A هي $n \times n$ مصفوفة خاملة برتبة Γ فتوجد مصفوفة متعامدة C بحيث أن الصيغة $C'AC$ تكون مصفوفة قطرية بعدد Γ من عناصر القطر مساوية للواحد و بقية عناصر القطر الأخرى تساوي الصفر ، و منه نقول:

(1) كل مصفوفة خاملة تكون مصفوفة موجبة شبه محددة .

فما دام $A=AA=A^2=A^2$ صيغة تربيعية $(Ax)'(Ax) = Ax'Ax$ تساوي لمجموع مربعات عناصر Ax .

و منه فإن كل عناصر قطر المصفوفة الخاملة تكون غير سالبة.
(2) إذا كانت A مصفوفة خاملة، و غير شاذة فإن $A=I$ لأن :

$$\begin{aligned} A &= A.A \\ A^{-1}A &= A^{-1}.A.A \\ I &= A \end{aligned}$$

(3) إذا كانت A مصفوفة خاملة ، و C مصفوفة متعامدة من نفس المرتبة فإن الصيغة $C'AC$ تكون مصفوفة خاملة لأن :

$$(C'AC)'(C'AC) = C'A^2C = C'AC$$

(4) إذا كانت A مصفوفة خاملة ، فإن $I-A$ تكون كذلك مصفوفة خاملة لأن

$$(I-A)^2 = I-A$$

$$A.(I-A) = 0 \quad \text{و لاحظ أن :}$$

(5) إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة خاملة، و كانت $a_{ii}=0$ ، فإن السطر i و العمود i للمصفوفة

A تكون موجهات صفرية . لأن عنصر القطر A^2 هو :

$$\sum_j a_{ij}a_{ji} = \sum_j a_{ij}^2$$

مع التناظر، $a_{jj} = a_{jj}$ يعطي النتيجة:

$$a_{ii} = \sum_j a_{ij}^2$$

لأن عناصر القطر i للمصفوفتين A و A^2 متساوية.

المصفوفات المتعامدة :

إن المصفوفة المتعامدة C هي مصفوفة مربعة بحيث أن معكوسها يساوي إلى منقولها $C^{-1} = C'$ أو $CC' = C'C = I$. عنصر القطر لمعادلة المصفوفة $CC' = I$ يشير إلى أن كل أسطر هذه المصفوفة لها عمدة length هي الواحد ، و العناصر الخارجة عن القطر تشير إلى أن هذه الأسطر تكون متعامدة . إن معادلة

المصفوفة $C'C=I$ تبين لنا بأن أعمدة C لها نفس الخصائص . تكون الأمثلة البديهية للمصفوفة المتعامدة هي المصفوفتين (I) و $(-I)$ وكذلك المصفوفة :

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CC' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

القيم المميزة و الموجهات المميزة :

إن القيم المميزة و الموجهات المميزة هي حلول لنظام المعادلات :

$$AX = \lambda X \quad \dots\dots\dots (A.18)$$

حيث أن A مصفوفة مربعة معروفة و من المرتبة n ، x موجه سطر ل n عنصر غير معروف ، و λ عدد سلمي غير معروف . من أجل المصفوفة المعروفة A هناك n حل للعدد السلمي λ ، حيث يمكن لهذه الحلول الخاصة ب λ_i أن تكون مختلفة أو متشابهة و هناك n موجه مميز موافق لقيم λ_i . و تكون هذه الموجهات المميزة متعامدة إذا كانت المصفوفة A متناظرة . أما إذا كانت A مصفوفة غير متناظرة، فيمكن للقيم المميزة λ_i أن تحتوي على أعداد مركبة ، أما الموجهات المميزة فليس بالضرورة أن تكون متعامدة في هذه الحالة . فإذا أخذنا المعادلة (A.18) في شكل :

$$(A - \lambda I) X = 0 \dots\dots\dots (A.19)$$

و التي هي نظام معادلات متجانس ، فيكون الشرط الضروري للحلول المتعددة هو أن لا يكون لمعامل المصفوفة رتبة تامة . أما إذا كانت المصفوفة $(A - \lambda I)$ غير شاذة ، فإن الحل الوحيد للمعادلة (A.19) هو أن $x=0$. و لكي نحصل على حل مختلف عن الصفر يجب على هذه المصفوفة أن تكون شاذة ، أي محددها معدوم . و يعطي هذا الشرط :

$$|A - \lambda \cdot I| = 0 \quad \dots\dots\dots (A.20)$$

و التي تعرف بإسم المعادلة المميزة للمصفوفة. و يعطي ذلك معادلة لكثير الحدود بدلالة λ غير المعروفة على الشكل:

$$|A - \lambda I| = (-\lambda)^n + \alpha_1 (-\lambda)^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} (-\lambda) + \alpha_n = 0$$

حيث أن α_k هي المرتبة K لأثر A ، $K = 1, 2, 3, \dots, n$.

و كل جذر أو قيمة مميزة λ_i يمكن تعويضها في المعادلة (A.19) لنحصل عن الموجه المميز المناسب X_i .

فمثلا من أجل A هي 2×2 لدينا :

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 - (a_{11} - a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \end{aligned}$$

بجذور هي:

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right]$$

$$i = 1, 2.$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

تكون المعادلة المميزة هي:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

إن حل المعادلة المميزة يحتوي على n جذر مميزة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ والتي ليست بالضرورة مختلفة أو حقيقية. و بالنسبة لكل هذه الجذور (القيم) المميزة تكون هناك موجهات مميزة مناسبة لها. المثال السابق لدينا $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ يكون الموجه المميز هو :

من أجل $\lambda_1 = 1$ نعوض في المعادلة (A.19) لنجد:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2x_2$$

و منه فإن عنصرا واحدا في الموجه المميز يكون إختياريا. أي إذا كانت x تحقق المعادلة (A.19) من أجل بعض λ فإن CX تحقق نفس الشيء ، بحيث أن C هو ثابت إختياري، ومنه من المستحسن تعيير $normalise$ الموجه بواسطة طول عمدته أي:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

و التي مع $x_1 = -2x_2$ تعطي:

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

من أجل $\lambda_2 = 2$ نعوض بنفس الطريقة لنجد أن:

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{5}x_2$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{29} \\ -2/\sqrt{29} \end{pmatrix}$$

و منه نلاحظ أن الموجهات المميزة تكون متعامدة $x_1'x_2 = 0$ فقط لما تكون المصفوفة A متناظرة ففي مثالنا أعلاه نلاحظ A غير متناظرة و منه فإن $x_1'x_2 \neq 0$ بينما لو أخذنا المصفوفة المتناظرة A على الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن جذورها المميزة هي $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$ ، تكون الموجهات المميزة هي:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

و من ثم فإن $x_1'x_2 = 0$ أما إذا جمعنا الموجهين المميزين في شكل مصفوفة واحدة على النحو:

$$X = [x_1 x_2] \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$X'X = XX' = I \quad \text{فنجد أن:}$$

أما إذا وضعنا الصيغة التربيعية $X'AX$ فنجد أن:

$$X'AX = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A..21)$$

و منه الصيغة التربيعية الناتجة للمصفوفة المتناظرة A و مصفوفة موجهاتها المميزة يعطي مصفوفة قطرية مع عناصر قطرها مساوية للجذور المميزة لتلك المصفوفة A .

- ومن خصائص الجذور المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ لأية مصفوفة مربعة A نذكر:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{trace}(A) \quad (1)$$

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = |A| \quad (2)$$

(3) إذا كانت A مصفوفة مربعة قطرية فإن $\lambda_i = d_i$ حيث أن :

$$d_i = s_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$$

(4) إذا كانت A مصفوفة متعامدة فإن : $\lambda_i = \pm 1$

(5) إذا كانت A مصفوفة خاملة فإن λ_i تساوي الصفر أو الواحد و كذلك

$$\text{Rank}(A) = \sum \lambda_i$$

(6) إذا كانت A و B مصفوفتين متماثلتين. فإنه يكون لهما نفس الجذور المميزة.

(7) إذا كانت λ_i هي الجذور المختلفة عن الصفر للمصفوفة A ، و t عدد موجب فإن λ_i^t

تكون هي الجذور المميزة للمصفوفة A^t

خصائص الجذور المميزة والموجهات المميزة لأية مصفوفة متناظرة من مرتبة n :

- (1) إذا كانت المصفوفة A متناظرة فإن جذورها (قيمها) المميزة حقيقية .
- (2) إذا كانت المصفوفة A متناظرة فإن موجهاتها المميزة و المناسبة للقيم المميزة المختلفة تكون ثنائية التعامد .
- (3) إذا كانت المصفوفة متناظرة، و كانت القيمة المميزة λ لها مضاعف K فإنه يوجد K موجهات مميزة متعامدة و مناسبة لذلك الجذر (القيمة) .
- (4) إذا كانت A متناظرة فإن قيمها المميزة يمكن ألا تكون كلها مختلفة .
- (5) إن مجموع القيم المميزة يساوي إلى مجموع عناصر القطر لأثر المصفوفة .
- (6) إن حاصل ضرب القيم المميزة يساوي محدد المصفوفة .
- (7) إن رتبة المصفوفة A تساوي لعدد القيم المميزة المختلفة عن الصفر .
- (8) إن القيم المميزة للمصفوفة A^2 هي مربعات القيم المميزة للمصفوفة A . لكن الموجهات المميزة لكلا المصفوفتين هي نفسها .
- (9) إن القيم المميزة للمصفوفة A^{-1} هي معكوس القيم المميزة للمصفوفة A . بينما الموجهات المميزة هي نفسها بالنسبة للمصفوفتين .
- (10) إن رتبة المصفوفة الخاملة تساوي لأثرها .

الصيغ التربيعية :

تعرف الصيغة التربيعية على أنها مصفوفة مربعة مضروبة بواسطة موجه عمود (من اليمين) و منقول ذلك الموجه من اليسار . و إذا كانت $X'BX$ صيغة تربيعية مع B غير متناظرة فنعرف العبارة :

$$a_{ij} = (b_{ij} + b_{ji})/2$$

ثم نلاحظ أن :

$$\begin{aligned} X'BX &= \sum_i \sum_j [(b_{ij} + b_{ji})/2] x_i x_j \\ &= \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = X'AX \end{aligned} \quad \text{..... (A.22)}$$

و منه سوف تكون مصفوفة الصيغة التربيعية متناظرة . فالصيغة التربيعية (A.22) لما A هي (2×2) تكون :

$$x'Ax = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

أما لما A هي $n \times n$ مصفوفة متناظرة فإن :

$$\begin{aligned} x'Ax = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + a_{33}x_3^2 + \dots + 2a_{3n}x_3x_n \\ & + \\ & \vdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

أما لما تكون A مصفوفة قطرية فإن الصيغة التربيعية $X'AX$ تكون :

$$X'AX = \sum_{j=1}^n d_j X_j^2$$

و إذا كانت الصيغة التربيعية $X'AX > 0$ من أجل كل $X \neq 0$ ، فإننا نقول عن تلك الصيغة التربيعية بأنها مصفوفة محددة موجبة (P.D) و تكون المصفوفة A كذلك محددة موجبة . أما إذا $X'AX \geq 0$ من أجل كل $X \neq 0$ ، فإن الصيغة التربيعية والمصفوفة A يكونان شبه محددين موجبتين (P.S.D) . و نقول عن الصيغة التربيعية $X'AX$ بأنها محددة سالبة إذا كانت $X'AX < 0$ من أجل كل $X \neq 0$. و شبه محدد سالبة إذا كانت $X'AX \leq 0$ من أجل كل X . أما إذا كانت الصيغة التربيعية $X'AX > 0$ من أجل بعض X و سالبة من أجل الباقي فنقول بأنها مصفوفة غير معرفة .

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

مثال :

تكون A محددة موجبة لما $a > |b|$ و شبه محددة موجبة لما $a \geq |b|$ و محددة سالبة لما $a < -|b|$ ، ثم شبه محددة سالبة لما $a \leq -|b|$ ، و أخيرا غير معرفة لما $|a| < |b|$.

و من خصائص الصيغ التربيعية نذكر:

- (1) تكون مصفوفة A ، محددة موجبة إذا و فقط إذا كانت كل جذورها المميزة موجبة، أو إذا و فقط إذا كانت كل مكوناتها الرئيسية موجبة.
- (2) تكون A مصفوفة محددة سالبة إذا و فقط إذا كانت كل جذورها المميزة سالبة أو إذا و فقط إذا كانت كل مكوناتها الرئيسية تتبادل بالإشارة من السالب إلى الموجب.
- (3) تكون A مصفوفة شبه محددة موجبة إذا و فقط إذا كانت (A^-) هي مصفوفة شبه محددة سالبة.
- (4) إذا كانت A مصفوفة موجبة محددة (سالبة محددة)، و P مصفوفة غير شاذة، فإن $P'AP$ تكون مصفوفة محددة موجبة.
- (5) إذا كانت A مصفوفة محددة موجبة (محددة سالبة)، فإن A تكون غير شاذة، A^{-1} موجودة، و A^{-1} تكون مصفوفة محددة موجبة (محددة سالبة).
- (6) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $n \times n$ و لدينا $\text{Rank}(A) = n < m$ ، فإن $A'A$ تكون غير شاذة بينما AA' تكون مصفوفة شبه محددة موجبة.
- (7) إذا كانت A مصفوفة محددة موجبة ، فإنه توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تحقق الشرطين $P'P=A$ و $PA^{-1}P'=I$. و توجد كذلك مصفوفة مثلثية سفلى وحيدة هي T بحيث أن:

$$A = T \cdot T'$$

- (8) إذا كانت $X=MY$ حيث أن M هي مصفوفة عمدة ، فإنه بواسطة تقطير (Diagonalising) المصفوفة المتناظرة نجد:

$$X'AX = Y'DY = \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j^2$$

(9) إن الشرط الضروري و الكافي ، لمصفوفة حقيقية متناظرة ، لكي تكون محددة موجبة هو أن محدد كل مصفوفة جزئية رئيسية يكون موجبا .

(10) إذا كانت $A = B + C$ ، حيث B هي مصفوفة موجبة ، و C هي مصفوفة شبه محددة موجبة ، فإن A سوف تكون مصفوفة محددة موجبة ، أما $B^{-1} - A^{-1}$ فسوف تكون مصفوفة شبه محددة موجبة .

تفاضل الموجهات و المصفوفات :

إذا كانت $Y = f(x)$ هي $m \times 1$ دالة قيمة لموجه $n \times 1$ بموجه X هو $n \times 1$ ، فإن $\partial Y / \partial X'$ هي المصفوفة $m \times n$ مع $\partial Y_i / \partial X_j$ مشتقة عند السطر i بالنسبة للعمود j ، بينما $\partial Y' / \partial X$ هي مصفوفة $n \times m$ مع $\partial Y_j / \partial X_i$ مشتقة عند السطر j بالنسبة للعمود i ، و نلاحظ أن $\partial Y' / \partial X$ هي نفسها $(\partial Y / \partial X)'$. فإذا كانت لدينا دالة خطية للموجه $(n \times 1)X$ تكون:

$$Y = a'X$$

$$\partial Y / \partial X = a$$

$$\partial^2 Y / \partial X \partial X' = 0$$

و من أجل الصيغة التربيعية $Y = X' A X$ مع A متناظرة لدينا:

$$\partial Y / \partial X = 2AX$$

$$\partial^2 Y / \partial X \partial X' = 2A$$

و إذا كانت A مصفوفة غير متناظرة فإن:

$$\partial Y / \partial X = (A + A')X$$

$$\partial^2 Y / \partial X \partial X' = (A + A')$$

و كذلك من أجل الدالة الخطية $y = A X$ حيث A هي $m \times n$ فإن:

$$\partial Y / \partial X' = A$$

$$\partial Y' / \partial X = A'$$

مثال :

$$Y = X'AX = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial x_h} &= 2a_{hh} x_h + \sum_{j \neq h} a_{hj} x_j + \sum_{i \neq j} a_{ih} x_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_{hj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ih} x_j \end{aligned}$$

إن هذا هو العنصر h للعبارة $(A + A')X$

كما يمكن ملاحظة الصيغة التربيعية $Y = X'AX$ كدالة للعناصر a_{ij} في المصفوفة A . حيث أن المشتقة الجزئية بالنسبة لـ a_{ij} هي $x_i x_j$ والتي هي العنصر (i, j) للمصفوفة $X'X$ أي:

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = \frac{\partial (X'AX)}{\partial A} = XX'$$

مثال آخر :

$$Y'BZ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} y_i z_j$$

حيث أن B ليس بالضرورة أن تكون مصفوفة مربعة ، مع z_1, z_2, \dots, z_n و y_1, y_2, \dots, y_m هي $m+n$ متغيرات. و نحصل على النتائج التالية:

$$\frac{\partial (Y'BZ)}{\partial Y} = BZ$$

$$\frac{\partial (Y'BZ)}{\partial Z} = B'Y$$

$$\frac{\partial (Y'BZ)}{\partial B} = YZ'$$

- كما نلاحظ أن :

$$\frac{\partial \text{trace}(A)}{\partial A} = I$$

أما بالنسبة لمشتقه محدد فنرى أن:

$$|A| = a_{11}c_{11} + \dots + a_{1j}c_{1j} + \dots + a_{1n}c_{1n}$$

حيث أن c_{ij} هي العوامل المساعدة ل a_{ij} في المصفوفة A . إن a_{ij} c_{ij} تعتمد على a_{ij} بينما c_{ij} لا تعتمد على a_{ij} و منه فإن:

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} = c_{ij} = a^{ji}|A|$$

- حيث أن a^{ji} هو العنصر (i,j) للمصفوفة $(A')^{-1}$ و منه نجد:

$$\frac{\partial |A|}{\partial A} = |A| \cdot (A')^{-1}$$

- و في حالة A لها محدد موجب فإن:

$$\frac{\partial \log|A|}{\partial A} = (A')^{-1}, \quad |A| > 0$$

و بالنسبة لمشتقات عناصر المعكوس، دعنا نأخذ الجداء $C = AB$ لمصفوفتين مربعيتين $(n \times n)$ هما A و B ثم نتصور أن عناصر هاتين المصفوفتين تكون دوال لبعض المتغيرات السلمية x . باستعمال المعادلة:

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \dots \dots \dots (A.23)$$

نحصل على المشتقة الجزئية:

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial x} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \frac{\partial b_{kj}}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{ik}}{\partial x} \cdot b_{kj}$$

و التي ننظر إليها على أنها العنصر (i,j) لمعادلة المصفوفة $n \times n$:

$$\frac{\partial (AB)}{\partial x} = \frac{A \partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot B \dots \dots \dots (A.24)$$

و لنفرض الآن ، أن المصفوفة B في المعادلة (A.24) هي A^{-1} بحيث أن $C=AB=I$ مستقلة عن x ، فإن الطرف الأيسر للمعادلة (A.24) يصبح مصفوفة أصفار و التي تعطي:

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial x} = -A^{-1} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot A^{-1} \dots \dots \dots (A.25)$$

و نعبر عن x ، مثل x_{hk} ، على أنها العنصر (i,j) للمصفوفة A . ثم نعتد على الفرضية القائلة بأن كل العناصر n لهذه المصفوفة، يمكن النظر إليها كمتغيرات مستقلة .

إن مشتق A إذن بالنسبة لـ x_{hk} هو مصفوفة $(n \times n)$ و التي عنصرها (h,k) مساو للواحد و الباقي يساوي الصفر، إن مصفوفة المشتقات هذه يمكن كتابتها مثل $i_h i_k$ حيث: i_1, i_2, \dots هي أعمدة مصفوفة الوحدة $n \times n$. و نستنتج من المعادلة (A.25) أن مشتقة A^{-1} بالنسبة لـ x_{hk} يأخذ الشكل:

$$-(A^{-1} i_h)(i_k A^{-1})$$

إن $(A^{-1} i_h)$ هو العمود h للمصفوفة A^{-1} و $(i_k A^{-1})$ هو السطر k للمصفوفة A^{-1} و بالتالي فإن:

$$\frac{\partial a^{ij}}{\partial a_{hk}} = -a^{ih} \cdot a^{kj} \dots \dots \dots (A.26)$$

ملحق B : التوزيعات الاحتمالية :

1- بعض التوزيعات ذات المتغير الواحد

(a) التوزيعات المنفصلة:

لنعتبر التجربة العشوائية B ، أين توجد إكاثنتين فقط و هما إما النجاح أو الفشل . فإذا عرفنا المتغير العشوائي X بواسطة :

$$X = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

1 نجاح ، 0 فشل .

و نكون الإحتمالين :

$$P_T (X) = \begin{cases} P & : X = 1 \\ 1 - P & : X = 0 \end{cases}$$

حيث يمكن أن نستنتج بأن دالة الكثافة الاحتمالية ل X تأخذ الشكل :

$$f(Y, P) = \begin{cases} P^x (1 - P)^{1-x} & : X = 1, 2 \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

عمليا ، تكون p غير معروفة ، و يأخذ النموذج الاحتمالي الشكل :

$$\Phi = \left[f(x, \sigma) = \sigma^x (1 - \sigma)^{1-x}, x = 0, 1, \sigma \in [0, 1] \right]$$

و يسمى التوزيع أعلاه ، بتوزيع برنولي . أما إذا أعدنا التجربة العشوائية B ، n

مرة ، فنعرف المتغير العشوائي y ليكون عدد النجاحات هو n رمية trials .

و إذا كان إحتمال النجاح هو نفسه في n رمية ، فإن دالة الكثافة ل y تأخذ الشكل :

$$f(y, p) = \begin{cases} y^n P^y (1 - P)^{n-y} & , y = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

و نمثل ذلك بكتابة $Y \sim B(N, P)$. حيث يعني ذلك التوزيع الثنائي.

(b) التوزيعات المستمرة:

إن أحد أهم التوزيعات المستمرة هو التوزيع الطبيعي ، حيث إذا كانت x موزعة طبيعيا فإن دالة كثافتها تعطي بالعلاقة :

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[\frac{-1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right], x \in \mathbb{R}$$

حيث أن μ و σ^2 هما الوسط و التباين على الترتيب ، و هما معلمتين ثابتتين .
ونعبر عن ذلك بواسطة $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ و نلاحظ أن دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي تكون متناظرة حول الوسط μ

$$f(\mu + k) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-k^2}{2\sigma^2} \right] = f(\mu - k)$$

أما دالة التوزيع و المعرفة على الشكل:

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right] dx$$

فتعطي النتيجة :

$$f(-x) = 1 - f(x + 2\mu)$$

و تصل دالة الكثافة الإحتمالية إلى أعظم نقطة عند $x = \mu$ حيث أن:

$$\frac{d f(x)}{dx} = f(x) \left(\frac{-2(x - \mu)}{2\sigma^2} \right) = 0 \Rightarrow x = \mu, f(\mu) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

كما أن لدالة الكثافة نقطتي إنعطاف هما $x = \mu \pm \sigma$ إذا أن :

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{\sigma^{-3}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right] \left[\frac{1 - (x - \mu)^2}{\sigma^2} \right] = 0$$

و منه ينتج أن $x = \mu \pm \sigma$ و من أجل العزم من الدرجة الثالثة (الإلتواء) فإنه يكون معدوما .

أما العزم من الدرجة الرابعة (التفرطح) فإن $\alpha_4 = 3$ وبقية العزوم العليا تأخذ الشكل :

$$\mu_k = E(X - \mu)^k = \begin{cases} \frac{\sigma^k K!}{2^{k/2} \left(\frac{k}{2}\right)!} & K \text{ زوجي} \\ 0 & K \text{ فردي} \end{cases}$$

و نتأكد من ذلك بالنسبة لعزم الدرجة الثالثة :

$$\begin{aligned} E[(X - \mu)^3] &= \int_{-\infty}^{\mu} (X - \mu)^3 \cdot f(x) \cdot dx + \int_{\mu}^{+\infty} (X - \mu)^3 \cdot f(x) \cdot dx \\ &= \int_{-\infty}^0 Y^3 \cdot f(\mu + Y) \cdot dy + \int_0^{+\infty} (-Z^3) f(\mu - Z) (-dz) \end{aligned}$$

حيث أن :

$$Y = X - \mu$$

$$Z = \mu - X$$

و إذا كان التوزيع متناظراً ، فإن التكاملين الأخيرين يضمحلان مع بعضهما ، شريطة أن يكون العزم من الدرجة الثالثة موجوداً .

و من خصائص هذا التوزيع لدينا :

(I) إذا كانت X_1 متغير عشوائي موزع طبيعياً بواسطة $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، فإن :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

و يسمى بالتوزيع الطبيعي المعياري . كما أنه إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_{21}

متغيرات عشوائية مستقلة مع $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، فإن :

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_i \mu_i, \sum_i \sigma_i^2\right)$$

(II) إذا كانت X_1, \dots, X_k متغيرات عشوائية طبيعية معيارية ومستقلة ، فإن مجموع مربعات سلسلة المتغيرات تعطي التوزيع X_k^2 حيث أن K هي درجات الحرية ، ولها دالة الكثافة التالية :

$$f(x, k) = P[x \leq X_k^2 \leq x + dx]$$

$$= \frac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} \cdot x^{(k-2)/2} \cdot e^{-x/2}, \quad 0 < x < \infty$$

حيث أن :

$$\Gamma(g) = \int_0^{\infty} x^{g-1} e^{-x} dx$$

و هي دالة gamma و تحقق الشروط:

$$\Gamma(g) = (g-1) \cdot \Gamma(g-1)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

و نرسم دالة الكثافة ، أعلاه تبعا لعدة قيم يأخذها K . و منه نقول إذا كانت X_1, \dots, X_k متغيرات عشوائية مستقلة مع $X_i \sim \chi_{n_i}^2$ فإن $i = 1, 2, 3, \dots, k$:

$$\sum_{i=1}^k X_i \sim \chi_{(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k)}^2$$

(III) لنعتبر الآن نسبة متغيرين لـ χ^2 المستقلين مع m, n درجات حرية . ويمكن أن نبين بأن :

$$\frac{\chi_m^2/m}{\chi_n^2/n} = F(m, n)$$

و هي موزعة لـ F Fischer's مع درجتَي الحرية m و n . إن دالة الكثافة المناسبة لذلك هي :

$$\Pr[X < F(m, n) \leq x + dx] = f(x, m, n)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \cdot x^{(m-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{\frac{1}{2}(m+n)}}, \quad 0 < x < \infty$$

مع النتائج:

$$E(x) = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2$$

$$\text{Var}(x) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \quad n > 4$$

(IV) لنفرض أن X هي متغير طبيعي معياري مع Y لها توزيع X_k^2 ثم X و Y مستقلين. يمكن أن نبين بأن $X\sqrt{k}/Y$ تكون موزعة مثل student مع k درجات حرية من دالة الكثافة المناسبة لذلك و هي:

$$P.r = \left[x < t^k \leq x + dx \right] = f(x, k) \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k} \pi \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{\frac{1}{2}(k+1)}} \cdot dx, \quad -\infty < x < \infty$$

إن هذا التوزيع متناظر مع الوسط و التباين التاليين :

$$E(tK) = 0$$

$$\text{Var}(tK) = \frac{k}{k-2}, \quad k > 2$$

إن العزم من الدرجة الثالثة يضمحل بسبب التناظر، أما العزم من الدرجة الرابعة فهو $3k^2/(k-2)(k-4)$ ، وبالتالي فإن مقياس التفرطح يساوي إلى

$(k-4)/\sigma + 3$ ، إن هذا يفوق 3 و التي تشير إلى أن طرفي توزيع student-t ثخينين أكثر من التوزيع الطبيعي . لكن لما k تصبح كبيرة ، فإن ذلك الفرق يزول . و يوجد العزم من الدرجة الرابعة لما $k > 4$ فقط .

$$\alpha_4 = 3 + \frac{\sigma}{k-4}, \quad k \geq 4$$

2- التوزيعات المتعددة المتغيرات :

لتكن $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ هي $n \times 1$ موجه عشوائي. إن وسط الموجه $E(x)$ هو:

$$E(x) = \begin{bmatrix} E(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ E(x_n) \end{bmatrix} = \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

أما مصفوفة التباين - التباين المشترك فهي :

$$\text{Var} - \text{cov}(x) = E[(x - \mu)(x - \mu)']$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Var}(x_1) & & & \text{Cov}(x_1, x_j) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ \text{Cov}(x_j, x_i) & & & \text{Var}(x_n) \end{bmatrix} = \varepsilon$$

حيث أن ε هي مصفوفة متناظرة و محددة موجبة .

إذا كان الموجه العشوائي x له دالة كثافة مستمرة فإن $\varepsilon > 0$. و إذا كانت x لها وسط μ و تباين ε فإنه من أجل $Z = AX + b$ يكون :

$$i) \quad E(Z) = AE(X) + b = A\mu + b$$

$$ii) \quad \text{Var} - \text{Cov}(Z) = AE(X - \mu)(X - \mu)' A' = A\xi A'$$

و إذا كانت x و y هي $nx1$ و $mx1$ موجهات عشوائية مع $E(x) = \mu_x$ و $E(y) = \mu_y$ فإن:

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)']$$

3- التوزيع الطبيعي المتعدد المتغيرات :

- إن دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي ذو المتغير الواحد هي:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right]$$

أما دالة الكثافة للموجه $X = (x_1, \dots, x_n)'$ لما تكون المتغيرات العشوائية x_i هي متغيرات مستقلة و متماثلة التوزيع لها الشكل:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \mu, \sigma^2)$$

$$= (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right]$$

و منه نستنتج أن دالة الكثافة لموجه x طبيعي $E(x) = \mu$, $\text{var}(x) = \varepsilon$ تأخذ الشكل :

$$f(x, \mu, \varepsilon) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\varepsilon|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \mu)' \varepsilon^{-1}(x - \mu)\right]$$

ومنه نكتب:

$$X \sim N(\mu, \varepsilon)$$

4- الدالة المولدة للعزوم :

إن الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي X هي :

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \begin{cases} \sum_i P_i e^{tx_i} & \text{التوزيع منفصل} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x) dx & \text{التوزيع مستمر} \end{cases}$$

$$M_x(t) = E \left[1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \dots + \frac{(tx)^k}{k!} + \dots \right]$$

$$= \left[1 + (EX)t + E(X^2) \frac{(t)^2}{2!} + \dots + E(X^k) \frac{(t)^k}{k!} + \dots \right]$$

و نعتبر الآن المشتقتين الأولى و الثانية للدالة $m_x(t)$ كحالة خاصة للمعادلة أعلاه:

$$\frac{dM_x(t)}{dt} = E(X) + E(X^2) \cdot t + \dots + E(X^k) \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots$$

$$\frac{d^2 M_x(t)}{dt^2} = E(X^2) + E(X^3) + \dots + E(X^k) \cdot \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \dots$$

و واضح أن العزم من الدرجة k حول الصفر هو كذلك مساوي للمشتقة من المرتبة k للدالة المولدة للعزوم مقيمة عند النقطة $t=0$ و منه توجد طريقتين لإستعمال

الدالة المولدة للعزوم من أجل الحصول على عزوم التوزيع .

و من أجل التوزيع الطبيعي ذو المتغير الواحد يكون لدينا :

$$M_x(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[tx - \frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx$$

و نكتب العبارة ما بين قوسين على الشكل :

$$\begin{aligned}
 t_x - \frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 &= -\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2 - 2 \sigma^2 t x}{\sigma^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{(x - \mu - \sigma^2 t)^2 - 2 \mu \sigma^2 t - \sigma^4 t^2}{\sigma^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{(x - \mu - \sigma^2 t)^2}{\sigma^2} + \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2
 \end{aligned}$$

و منه فإن الدالة المولدة للعزوم بالنسبة للتوزيع الطبيعي ذو المتغير الواحد هي:

$$\begin{aligned}
 M_x(t) &= \exp \left[\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right] \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \int \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu - \sigma^2 t)^2}{\sigma^2} \right] dx \\
 &= \exp \left[\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right].
 \end{aligned}$$

أما لما يكون x هو موجه عشوائي، فإن الدالة المولدة للعزوم هي:

$$\begin{aligned}
 M_x(t) &= E[e^{t'x}] \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t'x} \cdot (2\pi)^{-n/2} |\varepsilon|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - (\mu + \varepsilon t))' \varepsilon^{-1} (x - (\mu + \varepsilon t)) \right] dx
 \end{aligned}$$

لأن العبارة تحت التكامل المتعدد هي دالة كثافة احتمالية للتوزيع الطبيعي المتعدد المتغيرات. و منه يكون موجه الوسط هو $E(x) = \mu$ و مصفوفة التباين المشترك هي $E[(x - \mu)(x - \mu)'] = \varepsilon$ و بالرغم من أن التباين المشترك المعلوم لا يستلزم بالضرورة أن هناك إستقلالية، فإنه في حالة التوزيع الطبيعي المتعدد المتغيرات يكون ذلك صحيحا.

إذا كانت $X \sim N(\mu, \varepsilon)$ مع ε قطرية، فإن المتغيرات العشوائية X_1, X_2, \dots, X_n هي متغيرات طبيعية. حيث تكون عناصر قطر ε هي $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ لنجد:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (2\pi)^{-n/2} (\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \right] \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \cdot (\sigma_1^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] \cdot (2\pi)^{-n/2} (\sigma_2^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \dots \\
 &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \dots f_n(x_n)
 \end{aligned}$$

حيث أن كل $f_i(X_i)$ هو توزيع طبيعي ذو متغير واحد بوسط هو μ_i و تباين σ_i^2 .

5) الصيغ التربيعية و التوزيع الطبيعي المتعدد :

- إذا كانت $X \sim N(\mu, \varepsilon)$ و $Y = BX$ مع B مصفوفة $m \times n$ و ذات رتبة m نجد أن :

$$Y \sim N[B\mu, B\varepsilon B']$$

حيث من الدالة المولدة للعزوم نجد :

$$M_{B X}(t) = E[\ell^{t'B X}] = E[\ell^{(t'B) X}] = M_X(B't)$$

و مادام

$$M_X(t) = \exp \left[\mu't + \frac{1}{2} t'\varepsilon t \right]$$

فإن :

$$MY(t) = MB_X(t) = \exp \left[\mu'B't + \frac{1}{2} t'B\varepsilon B't \right]$$

و التي هي الدالة المولدة للعزوم للتوزيع $N(B\mu, B\varepsilon B')$ لأن الشرط القائل بأن رتبة B هي m تضمن لنا بأن تكون $B\varepsilon B'$ مصفوفة محددة موجبة .

و لنأخذ المصفوفة A الخاملة و المتناظرة برتبة Γ . بحيث لديها Γ من قيمة مميزة مساوية للواحد ، و $n - \Gamma$ قيمة مميزة مساوية للصفر و لتكن Λ هي مصفوفة القطر للقيم المميزة ، ثم نطلب هذه القيم المميزة بحيث أن عناصر القطر Γ الأولى Λ تكون الواحد . و مادام A متناظرة فإن :

$$A = Q \cdot \Lambda Q'$$

حيث أن أعمدة Q هي موجّهات مميزة معيارية Normalised .

(I) إذا كانت $X \sim N(0, I)$ و A هي مصفوفة خاملة و متناظرة برتبة Γ فإن:

$$X'AX \sim X_{\Gamma}^2$$

حيث إذا عرفنا $Y=Q'x$ فإن:

$$X'AX = X'Q \Lambda Q'X = Y' \Lambda Y = Y_1'Y_1$$

حيث أن Y مجزأة إلى Y_1 و Y_2 مع y_1 هي $\Gamma \times 1$. و منه $Y_1'Y_1$ هي مجموع مربعات Γ متغيرات طبيعية معيارية و مستقلة .

(II) إذا كانت $X \sim N(0, I)$ و A هي $n \times n$ مصفوفة خاملة و متناظرة برتبة Γ مع B هي $n \times n$ مصفوفة فإن الشكل الخطي BX يكون مستقلا عن الصيغة التربيعية $X'AX$ إذا كانت $BA = 0$.

فإذا أخذنا $Y=Q'X$ و بالتالي $X'AX=Y_1'Y_1$. نعرف كذلك

لأن $BA=0$ ، لكن بتجزئة D إلى D_1 و D_2 ، مع D_1 هي $m \times \Gamma$ فإن :

$$D\Lambda = [D_1 \ 0] = 0$$

$$D_1 = 0$$

$$BX = BQQ'X$$

وكذلك

$$= DY = D_2 Y_2$$

$$D_1 = 0$$

إذن $X'AX$ و BX ليس لهما عناصر من Y مشتركة ، و مادام عناصر Y تكون مستقلة ، فإن عناصر $X'AX$ و BX تكون مستقلة كذلك .

(III) إذا كانت $X \sim N(0, I)$ و A هي $n \times n$ مصفوفة خاملة و متناظرة برتبة S ، و B هي $n \times n$ مصفوفة خاملة و متناظرة برتبة S ، فإن الصيغتين التربيعيتين $X'AX$ و $X'BX$ تكونان مستقلتين إذا كانت $BA=0$.

حيث إذا كانت $Y = Q'X$ ، $X'AX = Y_1'Y_1$ نعرف الآن :

$$G = Q'BQ$$

و مع G متناظرة فإن :

$$G\Lambda = Q'BQAQ$$

$$= Q'BAQ = 0$$

$$BA = 0$$

ثم بتجزئة G مع G_1 هي $\Gamma X \Gamma$ لنجد :

$$GD = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_2' & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ G_2 & 0 \end{bmatrix}$$

إن الصيغة التربيعية $X' BX$ هي :

$$X' BX = X' Q Q' B Q Q' X = Y' G Y = Y_2' G_3 Y_2$$

إذن $X' AX$ و $X' BX$ ليس لهما من Y مشتركة .

(IV) إذا كانت $X \sim N(0, \varepsilon)$ فإن $X' \varepsilon^{-1} X \sim \chi_n^2$

حيث أن δ^{-1} و δ محددين موجبتين و توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تحقق :

$$P' P = \varepsilon^{-1}$$

$$\varepsilon = (P' P)^{-1} = P^{-1} P'^{-1}$$

و نعرف $Y = PX$ ولدينا حسب (i) :

$$Y \sim N[0, P \varepsilon P'] = N(0, I)$$

و منه فإن :

$$X' \varepsilon^{-1} X = Y' P'^{-1} \varepsilon^{-1} P^{-1} Y$$

$$= Y' Y$$

و مادام عناصر Y مستقلة مع التوزيع $N(0,1)$ ، فإن $Y' Y$ هي مجموع مربعات n

متغيرات طبيعية معيارية مستقلة و بالتالي يكون χ_n^2 كذلك.

قائمة المراجع

- 1- BRIDGE . J.L "Applied Econometrics",
North - Holland publishing Company, Amsterdam 1971.
- 2- BRILLET.J.L "Modelisation Econometrique": Principes et
Techniques, Economica, Paris 1994.
- 3- CHALLEN .D.W and HAGGER.A.J "Macroeconometric
Systems: Construction, Validation and Applications" Mac
Millan Press L.T.D, London 1983.
- 4- CHOW .G.C "Econometric Analysis by Control Methods"
John Wiley and Sons, New York 1981.
- 5- CHOW .G.C "Econometrics", Mc Graw-Hill, London, 1983.
- 6- COMON.M.S "Basis Econometrics" , John Weilley,
London 1971.
- 7- DAGNELIE.P "Theorie et Methodes statistiques",
Volume1,2. Les presses Agronomiques de Gembloux (A.S.B.L)
Belgique 1984.
- 8- DAVID .G.M "Applications of Econometrics", prentice Hall
International INC, London 1981.
- 9- DEATON. A. and MUELBAUER.J. "Economics and
Consumer Behavior", Cambridge University Press, 1980.
- 10- DHRYMES.P.J "Introductory Econometrics", Springer
Verlay, New York, 1971 and 1978.
- 11- DORNBUSH.R and FISHER.S "Macroeconomics",
MAC Graw-Hill Company, London 1994.

- 12- FARRAR.D.E and GLAUBER.R.R. "Multicollinearity in Regression Analysis" *Revue of Economics and Statistics*, Vol 49, 1967.
- 13- GODFREY.L.G "Misspecification Tests in Econometrics" Cambridge University Press, 1990.
- 14- GOLDBERGER.A.S "Econometric Theory" John Wiley and Sons, Inc, New York, 1964.
- 15- GOURIEROUX.C et MONFORT.A "Statistique et Modeles Econometriques", Volume 1,2, Economica, Paris 1989.
- 16- GRANGER.C.W.J and NEWBOLD.P "Forecasting Economic Time Series" Academic Press, Inc, London 1986.
- 17- HARVEY.A.C "The Econometric Analysisi of Time Series", Philip Alan, Oxford 1981.
- 18- HOUTHAKKER.H and TAYLOR.L "Consumer Demand in the USA 1929-1970", Analysis and Projections Harvard Univeristy Press, USA, 1970.
- 19- INTRILIGATOR.M.D "Econometric Models and Applications" Mc-Craw-Hill Company, London 1978.
- 20- JOHNSTON.J. "Econometric Methods", Mc-Craw-Hill International Book Company, London 1984.
- 21- JUDGE.G.G., GRIFFITHS.W.E, Hill.R.C and LEE.T.C "The Theory and Practice of Econometrics", Wiley, New York, 1980.
- 22- KELEJIAN.H.H. and OATES.WE. "Introduction to Econometrics", Second edition, Harpper International Edition, London 1976.

- 23- KMENTA.J. "Elements of Econometrics", Collier-Mac Millan Publishers, London 1971.**
- 24- KMENTA.J. and RAMSEY.J.B. "Evaluation of Econometric Models" Academic Press, London, 1980.**
- 25- KOUTSOYIANNIS.A. "Theory of Econometrics", Mc Millan Press. LTD, London 1983.**
- 26- LUCAS.R. and SARGENT.T. "Rational Expectations and Econometric Practice", George Allen, London 1981.**
- 27- L-TKERPHOL.H. "Introduction to Multiple Time Series Analysis", Springer-Verlag, Berlin, 1991.**
- 28- MADDALA.G.S. "Econometrics", Mc Craw-Hill New York 1971.**
- 29- MADDALA.G.S "Introduction to Econometrics", Mac Millan Publishing Company, New York, 1988.**
- 30- MALINVAUD.E "Statistical Methods of Econometrics" North-Holland Publishing Company, 1970.**
- 31- PINDYCK.R.S and RUBINFELD.D.L. "Econometric Models and Economic Forecasts", Mc-Craw-Hill Interenational Book Company, London 1981.**
- 32- POLLOCK.D.S.G. "The Algebra of Econometrics", John Weiley and Sons. LTD, 1979.**

- 33- SCHMIDT.P. "Econometrics" Marcel Delaken, New York, 1976.**
- 34- SPANOS.A. "Statistical Foundations of Econometric Modelling", Cambridge University Press, 1986.**
- 35- STEWART.J. "Econometrics", Cambridge University Press, 1991.**
- 36- STEWART.J. and WALLIS.K.F. "Introductory Econometrics" Basil Black-Well, Oxford 1981.**
- 37- STIGLER.J.M. "Gauss and the Invention of Least Squares", The Annals of statistics, Vol 9, N°3, 1981.**
- 38- THEIL.H. "Principles of Econometrics", John Wiley and Sons, New York, 1971.**
- 39- WALLIS.K.F. "Topics in Applied Econometrics" Basil Black-Well, Oxford, 1979.**
- 40- WONNACOTT.T. and WONNACOTT.R. "Introductory statistics", John Willey and Sons, London 1977 and 1979.**

أنجز طبعه على مطابع
كيوان المطبوعات الجامعية
الساحة المركزية - بن عكنون
الجزائر